

## T-61.140 Signaalinkäsittelyjärjestelmät Kevät 2005

HUOM! Kurssi luennoidaan todennäköisesti viimeistä kertaa keväällä 2005! Kurssin tenttejä järjestetään toukokuuhun 2006 asti. Korvaava kurssi "T-61.XXXX Datasta tietoon".

Esimerkkejä laskutehtävistä

Tehtäviä alkaen sivulta 2.  
Mallivastauksia alkaen sivulta 20.  
Kaavakokoelma alkaen sivulta 71.

Virheistä ja parannusehdotuksista voi laittaa viestiä osoitteeseen [t61140@cis.hut.fi](mailto:t61140@cis.hut.fi). Huomaa myös, että internetistä löytyy paljon tietoa ja esimerkkidemoja. Alla olevassa taukossa tehtäväsarakkeen koodi "B" tarkoittaa ennen kyseistä tehtävänantoa olevaa laatikkoa sivuilla 2-19.

Aihealue	Tehtäviä (kts. B yllä)
Kompleksiluvut, pariton ja parillinen funktio Kulmat, taajuudet Eulerin kaava Kompleksiarvoinen funktio	1-5, 4B 1, 2, 7B, 22B, 26B 4B, 5 5, 44
Signaalit $x(t)$ ja sekvenssit $x[n]$ , funktiot $\delta[n]$ , $u[n]$ Taaajuussuuret ja yksiköt Signaalin ja sekvenssin jaksollisuus	6 7B, 22B, 26B 7-8, 23, 38, 8B
Järjestelmät ja niiden ominaisuudet Lohkokaaviot (=virtauskaaviot) Lineaariset ja aikainvariantit (LTI) järjestelmät, FIR, IIR Konvoluutio, dekonvoluutio LTI-suotimen impulssivaste $h[n]$ LTI-suotimen differenssiyhtälö	9-11, 14, 10B, 19B, 45B 9, 12-13, 19-20, 44, 46 12-14, 19-21 15-18 17, 19-20, 45-47 12, 19-20, 45-47
Jatkuva-aikaisen signaalin $\tilde{x}(t)$ Fourier-sarja Diskreettiaikaisen sekvenssin $\tilde{x}[n]$ Fourier-sarja Jatkuva-aikaisen signaalin $x(t)$ Fourier-muunnos (CTFT) $X(j\Omega)$ Diskreettiaikaisen sekvenssin $x[n]$ Fourier-muunnos (DTFT) $X(e^{j\omega})$ Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) $X[k]$ , FFT	22-25 26-27 28-32 33-38 38
Suotimen taajuusanalyysi, asteluku Taajuusvasteen $H(e^{j\omega})$ laskeminen Amplitudivasteen $ H(e^{j\omega}) $ hahmottelu Suotimen lineaarivaiheisuus $\angle H(e^{j\omega})$ Ryhmäviive $\tau(\omega)$ , nousuaika, askelvaste $s[n]$ Ideaalisuodin Konvoluutio- ja kertolaskuominaisuus Näytteenotto ja signaalin rekonstruointi Matlab-komentoja	12, 39-40, 43-49 5, 45, 44B 5, 45, 44B 45, 47 45, 47 39-40, 55 30, 41-42 50-55 38, 44-45

T-61.140 Tehtäviä  
Vastauksia tehtäviin sivulta 20.

- Esitä kaava asteiden muuttamiseksi radiaaneiksi ja päinvastoin.
- Piirrä yksikköympyrä.
  - Merkitse pisteet  $A = (0, 0)$ ,  $B = (-0.5, 0)$  ja  $C = (-0.5, -\sqrt{3}/2)$ . Mitkä ovat tämän suorakulmaisen kolmion ABC kulmien arvot?
  - Mitkä kaksi kulmaa välillä  $-\pi \dots \pi$  toteuttavat  $\sin(\omega) = -0.5$ ?
- Osoita
  - $zz^* = r^2$
  - $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

Kompleksilukujen kertausta (esimerkiksi s. 71 / Oppenheim).  
Tärkeä Eulerin kaava  $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$ .  
Kompleksiluku  $z$  voidaan esittää suorakulmaisesti koordinaatistossa  $z = x + jy$  (imaginaariyksikkö  $i$  tai  $j$ ) tai polaarikoordinaatistossa  $z = r e^{j\theta}$ . Luvun  $z$  kompleksikonjugaatti on  $z^* = x - jy = r e^{-j\theta}$  ja moduli (pituus origosta)  $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- Funktio voidaan jakaa parilliseen (*Even*) ja parittomaan (*Odd*) osaan:  
 $Even\{x(t)\} = 1/2[x(t) + x(-t)]$  ja  $Odd\{x(t)\} = 1/2[x(t) - x(-t)]$ .  
Olkkoon  $H(\omega) = e^{j\omega}$ . Laske:
  - $Even\{H(\omega)\}$
  - $Odd\{H(\omega)\}$
- Tutkitaan kompleksilukuarvoista funktiota  $H(\omega) = 1 - e^{-j\omega}$ . (Tämä osoittautuu myöhemmin tyyppiliseksi diskreettiaikaiseksi ylipäästösuotimeksi.) Laske arvot  $H(\omega)$ ,  $|H(\omega)|$  ja  $\angle H(\omega)$ , kun  $\omega = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi\}$ .

Määritellään yksikköimpulssifunktio  $\delta[n]$  ja yksikköoskelfunktio  $u[n]$  (joskus  $\mu[n]$ ):

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 0 \\ 0, & \text{kun } n \neq 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \geq 0 \\ 0, & \text{kun } n < 0 \end{cases}$$

- Piirrä seuraavat signaalit ja sekvenssit origon ( $t = 0$  tai  $n = 0$ ) ympärillä.
  - $x_2(t) = 2 \cos(2\pi t - \pi/2)$
  - $x_3[n] = \sin(0.1\pi n)$
  - $x_4[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + 2\delta[n+1]$
  - $x_5[n] = \delta[-1] + \delta[0] + 2\delta[1]$
  - $x_6[n] = u[n] - u[n-4]$
  - $x_7[n] = x_4[2-n]$

Jatkuva-aikaisen (analogisen) signaalin jaksollisuus:  $\exists T \in \mathbb{R}$  s. e.  $x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbb{R}$ . Eksponentti-, sini- ja kosinifunktio ovat jaksollisia  $2\pi$ :n suhteen. Sijoituksen  $x(t+T)$  jälkeen on siis tarkoitus löytää sellainen arvo  $T$ :lle, että kulmaan lisätään aina vain  $2\pi$ -monikertoja (katso tehtäviä alla).

Jos signaalissa  $x(t)$  on useita sinikomponentteja, niin lasketaan ensin kaikkien jaksonajat  $T_i$  yksittellen ja etsitään pienin yhteinen jaksonaika  $T_0$ , johon kaikki  $T_i$ :t menevät tasan.  
**Perusjakson** on pienin mahdollinen  $T_0$ ; signaali on toki jaksollinen myös  $T_0$ :n monikertojen suhteen. Yksikkö  $[T] = s$ .  
**Perustaaajuus** on  $f_0$ , jonka avulla kaikki muut signaalien taajuudet voidaan esittää sen harmonisina monikertoina. (Tähän palataan Fourier-sarjan yhteydessä.) Yksikkö  $[f] = \text{Hz} = 1/s$ .  
**Peruskulmataajuus** on  $\Omega_0 = 2\pi f$ , jota toisinaan merkitään myös  $\omega$ . Analogisen suureen yksikkö on  $[\Omega] = \text{rad/s}$ .

- Mitkä seuraavista jatkuva-aikaisista signaaleista ovat jaksollisia? Määritä jaksollisten signaalien perusjakson pituus.
  - $x(t) = 3 \cos(\frac{3\pi}{31} t)$
  - $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$
  - $x(t) = \cos(\frac{\pi}{8} t^2)$

Diskreettiaikaisen (tai digitaalisen) signaalin eli sekvenssin (lukujonon) jaksollisuus:  $\exists N \in \mathbb{Z}$  s. e.  $x[n] = x[n+N], \forall n \in \mathbb{Z}$ . Tämä poikkeaa jaksollisen signaalin tarkastelusta vain siinä, että indeksi  $n$  ja jaksonaika  $N$  tulevat olla kokonaislukuja. Normalisoi tu näytteenottotaajuuden  $f_s$  suhteen) kulmataajuus  $\omega = 2\pi(f/f_s)$ , jonka yksikkö  $[\omega] = \text{rad}$ .

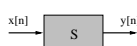
- Mitkä seuraavista sekvensseistä ovat jaksollisia? Määritä jaksollisten sekvenssin perusjakson pituus.
  - $x[n] = 3 \cos(\frac{3\pi}{31} n)$
  - $x[n] = \cos(\frac{\pi}{8} n - \pi)$
  - $x[n] = \cos(\frac{\pi}{8} n) - 2 \sin(\frac{\pi}{6} n + \frac{\pi}{6})$

9. Tarkastellaan kolme järjestelmää  $S_1$ ,  $S_2$  ja  $S_3$ , joiden syöte-vasterelaatiot ovat:

$$S_1 : y[n] = x[n] + 2x[n-2]$$

$$S_2 : y[n] = x[n] - 3x[n-1] - 2x[n-2]$$

$$S_3 : y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ parillinen} \\ 0, & n \text{ pariton} \end{cases}$$



Kuva 1: Tehtävät 9: Syöte  $x[n]$ , vaste  $y[n]$  ja diskreettiaikainen järjestelmä  $S$  ( $h[n]$ ).

- Olkkoon syötteenä lukuono  $x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - 2\delta[n-2] = \{3, 2, -2\}$ . Anna kuunkin järjestelmän ulostulojono.
- Esitä syöte-vasterelaatio sarjaankytkemällä  $S_1$  ja  $S_2$

- Esitä syöte-vasterelaatio rinnankytkemällä  $S_1$  ja  $S_2$
- \*Esitä syöte-vasterelaatio järjestelmälle, jossa ensin on  $S_3$ , siihen sarjaankytkettyinä  $S_1$ :n ja  $S_2$ :n rinnankytkentä, jonka jälkeen sarjassa invertoitu  $S_3$ . Miksi lopputulos ei ole sama kuin kohdassa c?

Järjestelmällä voi olla erilaisia ominaisuuksia, joiden avulla niitä voidaan luokitella. Tällä kurssilla tärkeimpiä järjestelmiä ovat LTI-järjestelmät (linear and time-invariant), jotka ovat siis lineaarisia ja aikainvariantteja. LTI-järjestelmien kausaalisuutta ja stabiilisuuata voi helposti tutkia myös impulssivasteen avulla.

- Tutki kutakin järjestelmää ja osoita, onko se
  - muistiton
  - lineaarinen (kuva 2)
  - aikainvariantti (kuva 3)
  - BIBO-stabiili
  - kausallinen

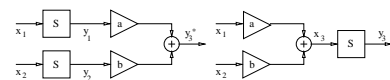
$$S_1 : y_1[n] = 0.5 x[n+1]$$

$$S_2 : y_2[n] = -0.5 x[-n-1]$$

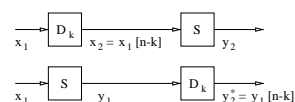
$$S_3 : y_3[n] = y_1[n] + y_2[n] = \text{Odd}\{x[n+1]\}$$

11. \*Järjestelmän ominaisuudet. Tutki, onko alla oleva järjestelmä

- lineaarinen ja/tai kausallinen:  $y[n] = ax[n-1] + b$ , jossa  $a$  ja  $b$  ovat reaalisia vakioita
- stabiili ja/tai kausallinen:  $y[n] = x[n+2] + 0.5^n x[n+1]$
- lineaarinen ja/tai aikainvariantti:  $y[n] = x^2[n] = (x[n])^2$
- aikainvariantti ja/tai stabiili:  $y[n] = 2n x[n-1]$

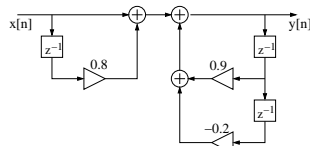


Kuva 2: Lineaarisuuden osoittaminen. Jos  $y_3 = y_3^*$ , niin lineaarinen.

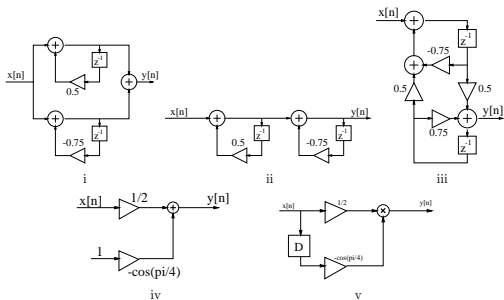


Kuva 3: Aikainvarianttisuuden osoittaminen. Jos  $y_2 = y_2^*$ , niin aikainvariantti.

- Kuvassa 4 on toisen asteen LTI-suodin. Mikä on sen differenssiyhtälö? Miten lasketaan suotimen asteluku?
- Tarkastele kuvan 5 lohkokaaaviokuvia ja vastaa kysymyksiin, onko järjestelmä
  - lineaarinen ja aikainvariantti (LTI)?



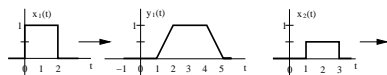
Kuva 4: Tehtävän 12 suodinn rakenne.



Kuva 5: Tehtävän 13 järjestelmien lohkokkaaviot

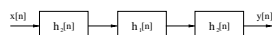
b) takaisinkytketty?

14. Kuvassa 6 esitetty syöte  $x_1(t)$  tuottaa eräaseen lineaariseen aikainvarianttiin (LTI) järjestelmään syötettynä vasteen  $y_1(t)$ . Käyttämällä hyväksi LTI-järjestelmän ominaisuuksia, hahmottele saman järjestelmän vaste syötteelle  $x_2(t)$ .

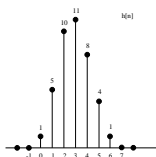


Kuva 6: Tehtävä 14. Lineaarisen aikainvariantin järjestelmän syöte ja vaste.

- a) Mikä on impulssivasteen  $h_1[n]$  nollasta poikkeavan osan pituus? Etsi impulssivaste  $h_1[n]$ .
- b) Mikä on systeemin vaste kun syöte on  $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ ?



Kuva 8: Tehtävä 17: Kolmen LTI-systeemin kaskadi.



Kuva 9: Tehtävä 17: Kaskadisysteemin impulssivaste.

18. Laske konvoluutio

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

missä

$$x[n] = 3^{-|n|} = 3^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$

- a) käyttämällä suoraan konvoluution määrittelmää,
- b) käyttämällä konvoluution osittelulakia  $((x_1 + x_2) * h = (x_1 * h) + (x_2 * h))$ .

LTI-järjestelmät jaetaan yleensä kahteen luokkaan niiden impulssivasteen pituuden perusteella: (1) Äärellisen pitkän impulssivasteen (FIR = Finite (length) impulse response) suotimet, ja (2) Äärettömän pitkän impulssivasteen (IIR = Infinite (length) impulse response) suotimet. FIR-suotimen laskenta menee "eteenpäin" eikä siinä ole takaisinkytkentöjä. FIR-suodin on aina stabiili, koska  $\sum_k |h[k]| < \infty$ . FIR-differenssiyhtälössä ei ole muita  $y[n]$  termejä kuin  $y[n]$ . IIR-suotimissa on silmukoita, takaisinkytkentöjä, jolloin laskenta on rekursiivista. IIR-suodin voi olla stabiili tai epästabiili. IIR-differenssiyhtälössä on aina mukana  $y[n]$  edellisiä (tai tulevia) termejä.

19. Tarkastellaan systeemiä, joka on määritelty differenssiyhtälöllä

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

- a) Piirrä systeemin lohkokkaavio.

Konvoluutio jatkuville signaaleille ja diskreettiaikaisille sekvensseille:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

Konvoluution voi yhdistää suodattamiseen siten, että jos  $x[n]$  on syöte ja  $h[n]$  impulssivaste, niin  $y[n] = h[n] * x[n]$  on vaste. Täten konvoluution saa laskettua vaikkapa niin, että laittaa sisääntuloon sekvenssin  $x[n]$  ja katsoo mitä suotimesta  $h[n]$  tulee ulos; ulostulo on konvoluution  $x[n] * h[n]$  tulos  $y[n]$ .

15. Piirrä ensin lukujonot  $x[n]$  ja  $h[n]$ . Laske sitten diskreettiaikainen konvoluutiotosumma

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- a)  $x[n] = \{1, 3, 2\}$ ,  $h[n] = \{1, -1\}$
- b)  $x[n] = 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$ ,  $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

16. Laske seuraavien diskreettiaikaisten järjestelmien konvoluutio kun

- a)  $x[n]$  ja  $h[n]$  ovat kuvan 7 kaltaiset (LTI)
- b\*)  $x[n] = \alpha^n u[n]$   
 $h[n] = \beta^n u[n]$ ,  $\alpha \neq \beta$



Kuva 7: Tehtävä 16: Järjestelmän syöte ja impulssivaste.

Diskreettiaikaisen konvoluution tarkistamisessa on pari peukalosääntöä: (1) Konvoluution  $y[n] = h[n] * x[n]$  pituus on konvoloitavien sekvenssien pituuksien summa miinus 1. (2) Konvoluution  $y[n] = h[n] * x[n]$  aloituskohdan indeksi on konvoloitavien sekvenssien aloituskohtien summa.

$$\begin{aligned} \text{Length}\{y[n]\} &= \text{Length}\{h[n]\} + \text{Length}\{x[n]\} - 1 \\ \text{Start}\{y[n]\} &= \text{Start}\{h[n]\} + \text{Start}\{x[n]\} \end{aligned}$$

17. Tarkastellaan kuvassa 8 esitetyn kolmen lineaarisen aikainvariantin systeemin (LTI) kaskadikytkentää. Systeemistä tiedetään, että impulssivaste  $h_2[n]$  on

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2],$$

ja että koko systeemin impulssivaste on kuvassa 9 esitetyn kaltainen. (Vihje: LTI-järjestelmille pätee esim.  $(h_1 * h_2) * h_3 = h_2 * (h_1 * h_3)$ .)

- b) Määritä systeemin impulssivaste  $h[n]$ .
- c) Mikä on systeemin vaste syötteellä  $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ .

20. Tarkastellaan systeemiä, joka on määritelty differenssiyhtälöllä

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

- a) Piirrä systeemin lohkokkaavio.
- b) Määritä systeemin impulssivaste  $h[n]$ , kun  $0 \leq n \leq 4$ . Miten impulssivaste käyttäytyy  $n$ :n suuremmilla arvoilla?
- c\*) Mikä on systeemin vaste (ratkaise differenssiyhtälö!), kun syöte on  $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ . (Vihje: yrite, homogeeninen yhtälö, erityinen yhtälö TAI z-muunnos.)

21. Tarkastellaan järjestelmiä  $S_1$  ja  $S_2$  kompleksisella syötteellä  $e^{j\pi n/6}$ . Riittävätkö annetut tiedot osoittamaan, että järjestelmä  $S_1$  tai  $S_2$  ei ainakaan ole LTI? (Kappale 3.2)

$$\begin{aligned} S_1 : e^{j\pi n/6} &\rightarrow e^{j3\pi n/7} \\ S_2 : e^{j\pi n/6} &\rightarrow 0.23 e^{j\pi n/6} \end{aligned}$$

Jaksollisen jatkuva-aikaisen signaalin Fourier-sarjaesitys esitellään luvussa 3.3 ja sen ominaisuuksia luvussa 3.5 sekä taulukossa 3.1 sivulla 206 (Oppenheim, Willsky). Jaksollisen jatkuva-aikaisen signaalin Fourier-sarjaesitys:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{jossa} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Tässä  $\omega_0$  ( $\equiv \Omega_0$ ) on peruskulmataajuus,  $f_0$  perustaajuus, ja  $T_0$  ( $T$ ) perusjaksonpituus. Jatkuvalle  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ ,  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ . Yksikkö  $[\omega] \equiv [\Omega] = \text{rad/s}$ . Kulmataajuuden esittämisessä on valittavaa vaihtelevuutta pienen ja ison omegan sulteen. Yksikkötarkastelulla voi varmistaa, että kosinin argumentiksi tulee paljas luku. Analogisen signaalin osalta esimerkiksi:  $\cos(0.4\pi t) = \cos(\Omega t)$ , jossa  $\Omega = 0.4\pi \text{ rad/s}$  ja  $[t] = \text{s}$ .

22. Tiedetään, että  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = a_{-1} = 2$ ,  $a_2 = a_{-2} = 0$ ,  $a_3 = a_{-3} = -1$ ,  $a_k = 0$  muulloin. Muodosta synteesisyhtälöllä  $x(t)$ , kun perusjakson pituus on 4. (Kappale 3.3)

23. Määrää seuraavien jaksollisten signaalien peruskulmataajuudet ( $\Omega \equiv \omega$ ) ja Fourier-kertoimet analyysiyhtälöllä

- a)  $x_1(t) = e^{-j\omega_0 t}$ , (kompleksinen signaali)
- b)  $x_2(t) = \cos(2\pi t) + \cos(3\pi t)$ , (reaalinen signaali)

24. Jaksollinen signaali  $x(t)$ , jonka perusjakso on 2 on määritelty seuraavasti:

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

- a) Piirrä  $x(t)$ , kun  $t \in -2..5$ .
- b) Määrää Fourier-kerroin  $a_0$ . Mitä se esittää?

- c) Määrittää derivaatan  $\frac{dx(t)}{dt}$  Fourier-sarja.  
 d\*) Käytä edellistä tulosta ja Fourier-sarjan derivointiominaisuutta (taulukosta:  $\frac{dx(t)}{dt} \dots jk\omega_0 a_k$ ) ja laske  $x(t)$ :n Fourier-kertoimet.

25. \*Signaalista  $x(t)$  tiedetään, että

- i)  $x(t)$  on reaaliarvoinen
- ii)  $x(t)$  on jaksollinen perusjaksolla  $T = 6$
- iii)  $a_k = 0$ , kun  $k = 0$  ja  $k > 2$
- iv)  $x(t) = -x(t - 3)$
- v)  $\frac{1}{6} \int_{-3}^3 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$
- vi)  $a_1$  on positiivinen reaaliarvo

Osoita, että  $x(t) = A \cos(Bt + C)$  ja laske vakiot  $A, B$  ja  $C$ .

Jaksollisen diskreettiaikaisen sekvenssin Fourier-sarjaesitys esitellään luvussa 3.6 ja sen ominaisuuksia luvussa 3.7 sekä taulukossa 3.2 sivulla 221 (Oppenheim, Willsky).

**Jaksollisen diskreettiaikaisen sekvenssin Fourier-sarjaesitys:**

$$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \text{jossa } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

Tässä  $\omega_0$  on (näytteenottataajuuden suhteen normalisointi) peruskulmataajuus,  $f_0$  perustaajuus,  $N_0(N)$  perusjakson pituus, ja  $f_s$  ( $\equiv f_T \equiv f_s$ ) näytteenottataajuus, joka useimmiten voidaan skaalata ja merkitä olevan  $f_s = 2$ . Diskreettiaikaiselle sekvenssille  $\omega_0 = 2\pi f_0 / f_s = 2\pi T_s / N_0$ ,  $N_0 = \frac{1}{f_0}$ , siten että  $N, n \in \mathbb{Z}$ . Kun  $f_s = 2$ ,  $T_s = 0.5$ , niin  $\omega_0 = \pi f_0 = \pi / N_0$ . Yksikkö  $[\omega] = \text{rad}$ .

Yksikkötarkastelulla voi varmistaa, että kosinin argumentiksi tulee paljas luku. Diskreettiaikaisen signaalin osalta esimerkiksi:  $\cos(0.4\pi n) = \cos(\omega n)$ , jossa  $\omega = 0.4\pi \text{ rad}$  ja  $[n] = 1$ .

26. Tiedetään, että perusjakson pituus  $N = 5$  ja kertoimet  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = a_{-1} = 2$ ,  $a_2 = a_{-2} = -1$ . Muodosta synteysyhtälöllä  $x[n]$ . (Kappale 3.6)

27. Määrittää seuraavien jaksollisten sekvenssien peruskulmataajuudet ja Fourier-kertoimet analyyttisesti

- a)  $x_1[n] = \cos(\pi n/3)$
- b)  $x_2[n] = \sin(\pi n/2) + \cos(\pi n/4)$

**Jatkuva-aikaisen signaalin Fourier-muunnos**  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$  johdettiin Fourier-sarjoista ajattelemalla jaksonaika äärettömän pitkäksi. Näin saatiin ( $\Omega \equiv \omega$ ):

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Huomaa myös taulukot 4.1 (s. 328, Properties of the F-transform) ja 4.2 (s. 329, Basic F-transform pairs). Ensimmäisestä on usein apua tehtävissä, joissa tiedetään signaalin  $x(t)$  F-muunnos  $X(j\omega)$  ja halutaan etsiä joku  $x$ :stä johdettu signaalin F-muunnos. Jälkimmäisessä on suoraan tiettyjä muunnoksia.

28. Kirjan esimerkit 4.4 ja 4.5: integrointiharjoitus, sinc-funktio ja duaalisuus.

- a) Laske Fourier-muunnos määritelmän mukaan signaalille

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

- b) Esitä a-kohdassa saatu F-muunnos sinc-funktion avulla,  $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$

29. F-muunna seuraavat signaalit ja impulssivaste käyttäen hyväksi taulukkoa (kts. alkaen sivulta 71) ja aiempia tuloksia. Vinkki: aikasiirto (a), aikasiirto ja lin. (b), aikasiirto (c), derivointi ajassa (d).

a)  $x(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

b)  $x(t) = (x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 4 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

c)  $h(t) = (h_2(t - 2)) = e^{-(t-2)} u(t - 2)$

d)  $x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

30. Konvoluutio-ominaisuutta (s. 314) käyttäen voidaan differentiaaliyhtälö ratkaista näppärästi algebrallisesti (ilman yrittäviä, vertaa tehtäviä 20c):

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \leftrightarrow \quad Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Laske impulssivasteiden  $h_1(t) = e^{-0.5t} u(t)$  ja  $h_2(t) = 2e^{-t} u(t)$  konvoluutio käyttämällä F-muunnoksen konvoluutio-ominaisuutta. Tällöin aikataason konvoluutio  $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$  lasketaan F-muunnosten  $H_1(j\omega)$  ja  $H_2(j\omega)$  kertolaskuna  $H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$  ja tämä tulos käänteismuunnetaan takaisin aikatasoon  $H(j\omega) \leftrightarrow h(t)$ .

31. \*Fourier-käänteismuunnos

- a) Laske käänteinen Fourier-muunnos

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

- b) Esitä a-kohdassa saatu signaali sinc-funktion avulla,  $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$
- c) Esitä suorakaidepulsin ja sinc-funktion duaaliominaisuudet Fourier-muunnoksessa (s. 309-310).

32. \*Lisää laskentaa

- a) Laske  $h(t) = e^t u(-t)$  ja  $x(t) = e^{-t} u(t)$  konvoluutio  $y(t) = h(t) * x(t)$  käyttämällä konvoluutio-ominaisuutta.

- b) Laske  $R(j\omega)$ , kun  $r(t) = e^{-|t|} \cos(2t)$ .  $R_1$  integroimalla,  $R_2$  taulukosta, näiden konvoluutio.

**Diskreettiaikaisen sekvenssin Fourier-muunnos (DTFT)**

$$F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Huomaa myös taulukot 5.1 (s. 391, Properties of the d-t F-transform) ja 5.2 (s. 392, Basic d-t F-transform pairs).

HUOM! Diskreetissä Fourier-muunnoksessa (DFT) myös taajuusalue on diskreetti (taajuinen).

33. Laske seuraavien sekvenssien diskreettiaikaiset Fourier-muunnokset:

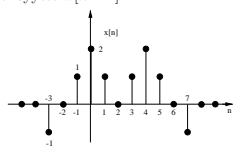
- a)  $x[n] = \delta[n - 1] + \delta[n + 1]$
- b)  $x[n] = (\frac{1}{2})^{n-1} u[n - 1]$

34. Tunnetaan reaalin sekvenssi  $x[n]$  ja sen diskreettiaikainen Fourier-muunnos  $X(e^{j\omega})$ . Olkoon taajuudella  $\omega_c = \pi/4$ :  $X(e^{j(\pi/4)}) = 3 + 4j$ . Päättele jaksollisuuden avulla ja laske

- a)  $|X(e^{j(\pi/4)})|$
- b)  $\angle X(e^{j(\pi/4)})$
- c)  $X(e^{j(-\pi/4)})$
- d)  $X(e^{j(\pi/4+2\pi)})$
- e) Jos  $f_s = 4000 \text{ Hz}$ , niin mikä on tutkittava taajuus  $f_c$

35. Laske jaksollisen sekvenssin  $x[n] = \sin((\pi/6)n + \pi/4)$  diskreettiaikainen Fourier-muunnos  $X(e^{j\omega})$ . Hahmottele kuvaajat  $|X(e^{j\omega})|$  ja  $\angle X(e^{j\omega})$ .

36. Olkoon  $X(e^{j\omega})$  kuvassa 10 esitetyn signaalin  $x[n]$  Fourier-muunnos. Tutki taulukon 5.1 ominaisuuksia. Fourier-muunnosta  $X(e^{j\omega})$  ei tarvitse määrittää missään kohdassa, kun huomaa käyttäen symmetrisyyttä  $x[n - 2]!$

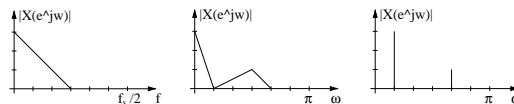


Kuva 10: Tehtävä 36 Diskreettiaikainen sekvenssi  $x[n]$ .

- a) Laske  $X(e^{j0})$ .
- b) Etsi  $\angle X(e^{j\pi})$ .
- c) Laske  $\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ .
- d) Etsi  $X(e^{j\pi})$ .
- e) Määritä  $\int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$  ja  $\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$ .
- f) Laske  $-\frac{d}{d\omega} \angle X(e^{j\omega})$ .
- g) Määritä ja piirrä signaali, jonka Fourier-muunnos on  $\Re\{X(e^{j\omega})\}$ .

37. Diskreettiaikainen Fourier-muunnos on  $2\pi$ -jaksollinen, itseisarvon  $|X(e^{j\omega})|$  ollessa parillinen ja  $\angle X(e^{j\omega})$  pariton funktio. Kuvassa 11 on reaalisin sekvenssin  $x[n]$  Fourier-muunnoksen itseisarvo  $|X(e^{j\omega})|$ . Hahmottele kukin  $|X(e^{j\omega})|$  alueelle  $-2f_s \dots 2f_s$ .

Näytteenottataajuuden  $f_s$ , näytteenottokulmataajuuden  $\omega_s$  ja näyteenvälin  $T_s$  yhteys on  $f_s = \omega_s / (2\pi) = 1/T_s$ . Esimerkiksi  $f_s = 44100 \text{ Hz} \rightarrow$  näytteiden välinen aika on  $22,7 \mu\text{s}$ .



Kuva 11: Tehtävä 37: Spektrejä kaistalla  $[0 \dots f_s/2]$  tai  $[0 \dots \pi]$ .

38. Matlabin `fft(x)`-komento palauttaa sekvenssin  $x$  diskreetin Fourier-muunnoksen (discrete Fourier transform, DFT):

$$X[k] = X(e^{j\omega})_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

Tässä siis spektri on myös lukujono spektrikomponenttien arvoja. Täten laskuoperaatio voidaan toteuttaa tietokoneella.<sup>1</sup>

Yhdistä kuvan 12 vasemman sarakkeen sekvenssit ja oikean sarakkeen tehospektrit  $|X(e^{j\omega})|^2$ . Vinkki: Yksi jaksollinen kosini taajuudella  $f_i$  luo yhden piikin spektriin positiiviselle taajuudelle  $f_i$ .

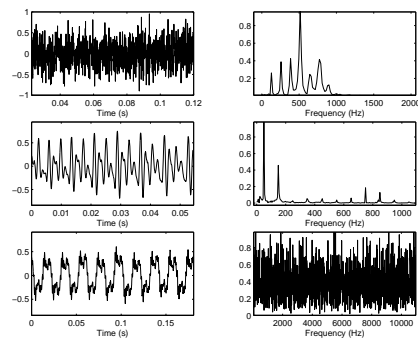
Tehty Matlabilla:

```
[x, fs, nbits] = wavread('aani.wav'); % luetaan äänisignaali, fs=näytt.ottotaaj.
soundsc(x, fs); % kuunnellaan
M = length(x);
t = [1 : M] / fs; % aika-akseli
plot(t, x); % piirretään aaltomuoto
xlabel('Time (s)');

xF = 2*fft(x)/M; % lasketaan DFT
f = fs * [0 : M-1]/M; % taajuusakseli 0..2pi == 0..fs
plot(f, xF.*conj(xF)); % piirretään |X(exp(jw))|^2
xlabel('Frequency (Hz)');
```

<sup>1</sup>Diskreettiaikaisessa Fourier-muunnoksessa, DTFT,  $X(e^{j\omega})$  saa  $\omega \in \mathbb{R}$ . Kun Jos esimerkiksi Matlab antaa kuvaajan  $X(e^{j\omega})$ -sta, se on useimmiten laskettu riittävän monen pisteen DFT:ä käyttäen.

39. Hahmottele seuraavien suodintyyppien amplitudivasteet taajuustasossa:



Kuva 12: Tehtävä 38: Yhdistettävät sekvenssit (vasen sarake) ja spektrit (oikea).

- a) alipäästösuodin
- b) ylipäästösuodin
- c) kaistanestosuodin
- d) kaistanpäästösuodin

40. Tarkastellaan jatkuvaa periodista signaalia  $x(t)$ , joka on määritelty seuraavasti:

$$x(t) = \cos(2\pi t) + 0.3 \cos(20\pi t)$$

- a) Hahmottele signaali  $x(t)$  aikatasossa.
- b) Määritä signaalin  $x(t)$  peruskulmataajuus ja Fourier-sarjaesityksen kertoimet  $a_k$ .
- c) Signaalia  $x(t)$  suodatetaan ideaalisella alipäästösuotimella, jonka rajakulmataajuus  $\omega_c = 10\pi$ . Piirrä suodatettu signaali.
- d) Signaalia  $x(t)$  suodatetaan ideaalisella ylipäästösuotimella, jonka rajakulmataajuus  $\omega_c = 10\pi$ . Piirrä suodatettu signaali.

41. Konvoluutio-ominaisuutta (s. 382)

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

käyttäen ratkaise  $y[n]$  (vrt tehtävät 20c ja 30)

- a)  $h[n] = (\delta[n-1] - \delta[n-2])$ ,  $x[n] = 0.6^n u[n]$
- b)  $h[n] = 0.4^{n-1} u[n-1]$ ,  $x[n] = (-0.7)^n u[n]$

42. Käytä hyväksesi kertolaskuominaisuutta (s. 388)

$$y[n] = h[n] \cdot x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

Signaalien  $x[n]$  ja  $g[n]$  Fourier-muunnokset ovat  $X(e^{j\omega})$  ja  $G(e^{j\omega})$ . Lisäksi on voimassa yhtälö

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})G(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = 1 + e^{-j\omega}$$

Lineaarisen vakiokertoimisen differenssiyhtälön karakterisoima LTI-järjestelmä (s. 396-399). Aikatazon konvoluutio vastaa taajuusatasossa muunnosten kertolaskua  $y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$  (katso kuva 13). Muistetaan alkukursista, että kausaalista, diskreettiä LTI-järjestelmää kuvaa vakiokertoiminen differenssiyhtälö

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Kun F-muunnoksessa käytetään hyväksi viivästysominaisuutta ( $x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$ ), saadaan

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

Tässä  $X(e^{j\omega})$  ja  $Y(e^{j\omega})$  ovat selvästi vakioita indeksin  $k$  suhteen, joten ne voidaan ottaa ulos summasta. Konvoluutio-ominaisuuden ( $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$ ) huomioon ottaen impulssivasteen  $h[n]$  Fourier-muunnos  $H(e^{j\omega})$  eli taajuusvaste on

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

Tunnetaan LTI-järjestelmä S sen impulssivasteen avulla  $h[n] = \frac{1}{3}(-\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2])$ .

- a) Kirjoita differenssiyhtälö ja piirrä aikatasossa lohkokaavio, jossa  $x[n]$  tulee vasemmalta järjestelmään S ja ulostulona on  $y[n]$ .
- b) Kirjoita  $H(e^{j\omega})$  eli määrää kertoimet  $b_0$ ,  $b_1$  ja  $b_2$ . Mitä tulee jakajaan arvoiksi  $a_k$ ?
- c) Onko kyseessä ali- vai ylipäästösuodin?

Usein halutaan analysoida LTI-suotimen käytöstä. Lähtötilanteena voi olla (a) suotimen lohkokaavioesitys, (b) impulssivaste  $h[n]$ , (c) differenssiyhtälö  $y[n] = \dots$  tai (d) taajuusvaste  $H(e^{j\omega})$ . Kaikki nämä ovat yksikäsitteisiä, joten kun yksi näkökulma tunnetaan, voidaan muutkin laskea tai havainnollistaa.

Lohkokaaviosta tai differenssiyhtälöstä nähdään usein suotimen käytännön toteutus, laskenta-algoritmi. Impulssivaste  $h[n]$  kertoo suotimen käytöksen aikatasossa. Impulssivasteen Fourier-muunnos  $H(e^{j\omega})$  kertoo käytöksestä taajuusatasossa.

Kuten tehtävässä 44 huomattiin, äärellisen pitkän impulssivasteen (FIR = Finite (length) impulse response) taajuusvaste  $H(e^{j\omega})$  on  $e^{j\omega n}$  suhteen yksinkertainen polynomi. Jos impulssivaste on äärettömän pitkä (IIR = Infinite (length) impulse response), niin taajuusvaste  $H(e^{j\omega})$  on rationaalilauseke, jossa sekä osoittajassa että nimittäjässä on polynomilauseke.

LTI-järjestelmissä impulssivasteesta  $h[n]$  voidaan nähdä järjestelmän kausaalisuus ja stabiilius. Jos  $h[n] = 0$ , kaikilla arvoilla  $n < 0$ , niin järjestelmä on kausaalinen. Jos  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ , niin järjestelmä on stabiili.

45. Olkoon annettuna taajuusvaste  $H(e^{j\omega}) = 0.5 \cdot (1 + e^{-j\omega})$ . Taajuusvaste voidaan hajottaa amplitudi- ja vaihevasteeseen  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg(H(e^{j\omega}))}$ .

- a) Jos  $x[n] = (-1)^n$  niin määrää diskreetti signaali  $g[n]$  siten, että sen Fourier-muunnos  $G(e^{j\omega})$  toteuttaa ylläolevan yhtälön. Onko olemassa muita ratkaisuja  $g[n]$ ?
- b) Toista edellinen kohta signaalille  $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ .

43. Ylipäästö- ja kaistanpäästösuodattimia suunniteltaessa toteutetaan usein ensin alipäästösuodatinta, jolla on halutut ominaisuudet ja sen jälkeen muunnetaan se HP- tai BP-suotimeksi. Etuna tästä on, että kaikkien suodintyyppien toteutukseen riittävät pelkästään alipäästösuodattimien suunnittelualgoritmit. Tarkastellaan esimerkiksi diskreetti-ai-kaista alipäästösuodatinta, jonka impulssivaste on  $h_{lp}[n]$  ja taajuusvaste  $H_{lp}(e^{j\omega})$ . Moduloidaan impulssivastetta jaksolla  $(-1)^n$ , niin että  $h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$ .

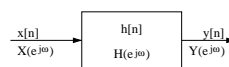
- a) Määritä  $H_{hp}(e^{j\omega})$   $H_{lp}(e^{j\omega})$ :n avulla. Osoita, että  $H_{hp}(e^{j\omega})$  on ylipäästösuodattimen taajuusvaste.
- b) Osoita, että diskreetti-ai-kaisten HP-suodattimien impulssivasteen modulointi jaksolla  $(-1)^n$  tuottaa alipäästösuodattimen.

44. Tutkitaan taajuusvastetta ja sen laskemista.

Aikatasossa ulostulosekvenssi  $y[n]$  saatiin laskemalla impulssivasteen ja syötteen konvoluutio  $y[n] = h[n] * x[n]$ . Jos syötteen asetetaan  $x_i[n] = e^{j\omega_i n}$  saadaan:

$$y[n] = h[n] * x_i[n] = \sum_k h[k] x_i[n-k] = \sum_k h[k] e^{j\omega_i (n-k)} = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_i k} \right) \cdot e^{j\omega_i n}$$

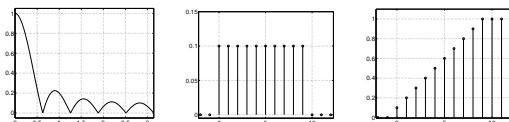
Huomataan, että ulostulossa on sama taajuuskomponentti  $e^{j\omega_i}$  kerrottuna jollain (kompleksiarvoisella) arvolla, joka vaikuttaa komponentin amplitudiin ja vaiheeseen. Termiä  $H(e^{j\omega}) = \sum_k h[k] e^{-j\omega k}$  kutsutaan **taajuusvasteeksi**. Taajuusvaste kertoo, miten suodin toimii taajuuden funktiona - LTI-suodin on "taajuusselektiivinen". Taajuusvaste on impulssivasteen Fourier-muunnos ja impulssivaste on taajuusvasteen käänteinen Fourier-muunnos. Taajuusvaste on yleensä kompleksiarvoinen, joten useimmiten käsitellään vain sen itseisarvoa, **amplitudivastetta**,  $|H(e^{j\omega})|$ .



Kuva 13: Tehtävä 44:  $y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

- a) Määrää impulssivaste  $h[n]$ , piirrä se ja järjestelmän lohkokaavio. Vinkki: FIR-tapauksissa  $H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] e^{-j\omega n}$ ; IIR kts. tehtävä 46.
- b) Laske ja piirrä askelvaste  $s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m]$ .
- c) Hahmottele  $H(e^{j\omega})$ :n kuvaaja **kompleksitasoon**, kun  $\omega$  saa arvoja  $0.. \pi$ . Laske muutamia arvoja ja hahmottele "pelmeästi" niiden välillä.
- d) Laske amplitudivaste  $|H(e^{j\omega})|$  (kompleksiluvun itseisarvo) ja hahmottele se välillä  $0.. \pi$ .
- e) Laske vaihevaste  $\arg\{H(e^{j\omega})\}$  (kompleksiluvun kulma) ja hahmottele se välillä  $0.. \pi$ .
- f) Desibeli-asteikolla teholliset amplitudiarvot saadaan laskemalla  $10 \log_{10} |H(e^{j\omega})|^2 = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$ . Hahmottele d-kohdan amplitudivaste nyt desibeli-asteikolla.
- g) Ryhmäkulkuaika/ryhmäviive/etenemisviive saadaan vaihevasteesta  $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\}$ . Laske  $\tau(\omega)$ . Mikä on sen yhteys impulssivasteeseen?
- h) Alla on annettu toisen suotimen  $H_2(e^{j\omega}) = 0.1 \sum_{k=0}^9 e^{-jk\omega}$  amplitudivaste, impulssivaste ja askelvaste. Mitkä ovat suotimen  $H(e^{j\omega})$  ja  $H_2(e^{j\omega})$  erot kaistanleveyksissä ja (askelvasteiden) nousuajoissa? Nousuaika on aika, jossa askelvaste nousee 10 %:sta loppuarvoistaan 90 %:iin.

\*i) Matlabin komennot?



Kuva 14: Tehtävä 45:  $H_2(e^{j\omega})$ : Amplitudivaste  $|H_2(e^{j\omega})|$ , impulssivaste  $h_2[n]$  ja askelvaste  $s_2[n]$ .

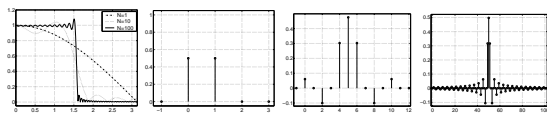
46. Kausaalinen ja stabiili LTI-systemeemi on määrätty seuraavan differenssiyhtälön avulla:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

- a) Piirrä lohkokaavio.
- b) Laske taajuusvaste  $H(e^{j\omega})$ .
- c) Hahmottele  $|H(e^{j\omega})|$ .
- d) Laske impulssivaste  $h[n]$ .

47. Tutki seuraavissa kuvissa esitetyt reaalisoitujen suotimien amplitudi- ja impulssivasteita.

- a) Miten suotimen asteluku vaikuttaa päästö- ja estokaistan väliseen siirtymäkaistaan (transition band)?
- b) Miten suotimen asteluku vaikuttaa ryhmäviiveeseen, kun kaikki toteutukset ovat lineaarivaiheisia suotimia.
- c) Mikä on askelvasteen nousuajan (suotimen nopeus) ja siirtymäkaistan leveyden suhde?



Kuva 15: Tehtävä 47: Vasemmalla toteutetun suotimen  $|H(e^{j\omega})|$  amplitudivaste asteluvuilla  $N = \{1, 10, 100\}$  ja kunkin suotimen  $h_1[n]$ ,  $h_{10}[n]$ ,  $h_{100}[n]$  impulssivaste.

\*d) Millaiselta ideaalisuodin näyttäisi? Mitä tarkoittaa suotimen realisaatio? Mitä suotimen suunnittelussa lasketaan? Miten digitaalinen suodin voidaan tehdä?

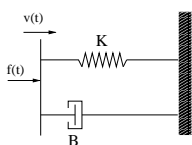
48. Jatkuva-aikaisen, kausaalisen ja stabiilin LTI-systeemin taajuusvaste on  $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$

- a) Osoita, että  $|H(j\omega)| = A$  ja laske  $A$
- b) Minkä tyyppinen suodin on kyseessä?
- c) Määritä, mikä seuraavista väitteistä pitää paikkansa ryhmäviiveelle  $\tau(\omega) = -d(\arg H(j\omega))/d\omega$ :
  - i)  $\tau(\omega) = 0$ , kun  $\omega > 0$
  - ii)  $\tau(\omega) > 0$ , kun  $\omega > 0$
  - iii)  $\tau(\omega) < 0$ , kun  $\omega > 0$

49. \*Tutkitaan kuvassa 16 esitettyä mekaanista systeemiä. Systeemin liikeyhtälö on muotoa

$$Bv(t) + K \int v(t)dt = f(t).$$

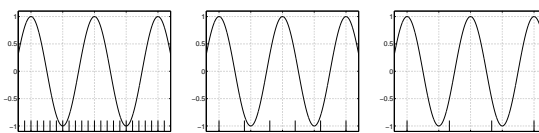
- a) Oletetaan, että vaste on  $f_s(t)$ , josta kokoon puristava voima. Kirjoita differentiaaliyhtälö  $f_s(t)$ :n ja  $f(t)$ :n avulla, etsi systeemin taajuusvaste ja osoita, että se approksimoi LP-suodinta.
- b) Oletetaan, että vaste on  $f_d(t)$ , hydraulista vaimenninta puristava voima. Kirjoita differentiaaliyhtälö  $f_d(t)$ :n ja  $f(t)$ :n avulla, etsi systeemin taajuusvaste ja osoita, että se approksimoi HP-suodinta.



Kuva 16: Tehtävän 49 järjestelmä.

Näytteenotossa jatkuvasta signaalista otetaan yleensä tasavälisin ajoin näytteitä, jolloin saadaan lukujono. On olemassa myös täysin synteettisiä lukujonoja, jotka voidaan rekonstruoida jatkuvaksi signaaliksi (tietokoneäänen yms.)

50. Näytteistä kuvassa 17 olevaa jatkuvaa kosinisignaalia  $x(t) = \cos(2\pi 100 t)$  kolmella näytteenottovälillä (i) 0.001 s, (ii) 0.004 s, (iii) 0.00666 s, ja piirrä diskreetit arvot kuvaajiin. Tarkista näytteenottotaajuuden "riittävyys" ja hahmottele diskreeteistä näytteistä  $x[n]$  jatkuvaksi palautettu signaali  $\hat{x}(t)$ .



Kuva 17: Tehtävä 50:  $x(t)$ , näytteistä  $x[n]$  käyttäen (i) 0.001 s, (ii) 0.004 s, (iii) 0.00666 s

51. Osoita, että jaksollinen impulssijuna  $p(t)$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

voidaan esittää Fourier-sarjana

$$p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi/T_s)kt}$$

jossa  $\omega_s = 2\pi/T_s$  on näytteenottokulmataajuus.

52. \*Edellisen tehtävän impulssijunan Fourier-muunnos voidaan esittää myös muodossa

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Näytteistäminen voidaan mallittaa aikatason kertolaskulla  $x[n] = x_p(t) = x(t)p(t)$ . Mikä on  $X_p(j\omega)$  mielivaltaiselle syötespektrille  $X(j\omega)$ ?

Vinkit: jaksollisen signaalin (Fourier-sarja) Fourier-muunnosesitys

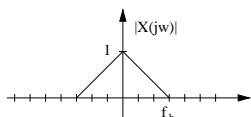
$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - k\omega_0)$$

Signaalien kertolasku aikatasossa vastaa muunnosten konvoluutiota taajuustasossa:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [X_1(j\omega) * X_2(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\theta) X_2(j(\omega - \theta)) d\theta$$

53. Tunnetaan jatkuvan signaalin  $x(t)$  spektri  $|X(j\omega)|$ , joka on piirretty kuvana 18. Signaalin korkein taajuuskomponentti on  $f_h$ . Näytteistetään signaalia näytteenottotaajuuksella  $f_s$  eli näytteet otetaan  $T_s = 1/f_s$  välein:  $x[n] = x(nT_s)$ . Hahmottele diskreetin signaalin spektri  $|X(e^{j\omega})|$ , kun

- a)  $f_h = 0.25 f_s$
- b)  $f_h = 0.5 f_s$
- c)  $f_h = 0.75 f_s$



Kuva 18: Tehtävä 53: Spektri  $X(j\omega)$

54. Tarkastellaan jatkuva-aikaista jaksollista signaalia  $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi 100 t) + \cos(2\pi 300 t) + \cos(2\pi 750 t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

jossa siis kosinitaajuudet 100, 300 ja 750 Hertsiä. Signaali näytteistetään taajuudella  $f_s$ . Toisin sanoen,  $T_s = 1/f_s$ ,  $p(t) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi f_s)kt}$ . Näin saadaan diskreetti sekvenssi  $x[n] = x_p(t) = x(nT_s)$ .

- a) Hahmottele  $x(t)$ :n spektri (kosini vastaa piikkiä taajuustasossa)
- b) Hahmottele  $x[n]$ :n spektri, kun  $f_s$  on
  - i) 1600 Hz
  - ii) 800 Hz
  - iii) 400 Hz

55. Signaalin rekonstruointi näytteistä

- a) Piirrä mielivaltainen kaistarajoitettu  $X(j\omega)$ , jonka suurin kulmataajuus on  $\omega_M$ .
- b) Näytteistä signaali näytteenottokulmataajuudella  $\omega_s > 2\omega_M$ . Piirrä näytteistetyn signaalin spektri  $X_p(j\omega)$ .
- c) Näytteistettyä signaalia on voitu suodattaa digitaalisella suotimella, toisin sanoen, lukujonolle on voitu tehdä muutoksia. Rekonstruoi signaali (spektri) takaisin jatkuvaksi käyttämällä ideaalista alipäästösuodinta  $H(j\omega)$ , jonka rajataajuus  $\omega_c$  on  $\omega_M < \omega_c < 0.5\omega_s$ . Piirrä palautetun signaalin spektri  $X_r(j\omega) = X_p(j\omega)H(j\omega)$ .
- d) Esitä edellisen kohdan yhtälö aikatasossa  $x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p(k)h(t - kT)$  Mikä on c-kohdan ideaalisen alipäästösuotimen  $H(j\omega)$  impulssivaste  $h(t)$ ?

T-61.140 Vastauksia tehtäviin

1. Ympyrän 360 astetta vastaa  $2\pi$ :ä. Eli:

$$\frac{\text{DEG}}{360} = \frac{\text{RAD}}{2\pi}$$

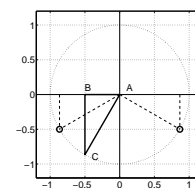
Esim. suorakulma on  $\pi/2$ . Jatkossa käytetään lähinnä radiaaneja perusvälillä  $-\pi \dots +\pi$ .

2. Eksponenttifunktio  $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$  piirtää yksikköympyrän, kun  $\omega = -\pi \dots +\pi$ . Nähdään:  $|e^{j\omega}| = |\cos(\omega) + j \sin(\omega)| = \sqrt{\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} = 1$ .

a) Suorakulmaisen kolmion (Pythagoras  $a^2 + b^2 = c^2$ ) kulmat:

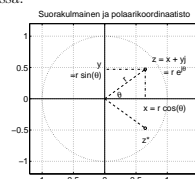
$$\begin{aligned} \angle ABC &= \pi/2 \\ \angle BCA &= \arctan\left(\frac{0.5}{\sqrt{3}/2}\right) = (1/6)\pi \\ \angle CAB &= \pi - \pi/2 - \angle BCA = (1/3)\pi \end{aligned}$$

b) Laskin antaa radiaaneissa  $\arcsin(-0.5) = -0.5236 \approx -\pi/6$ , ja yksikköympyrästä voidaan tarkistaa, että halutut kulmat ovat  $\omega_1 = -\pi/6$  ja  $\omega_2 = -5\pi/6$ . Voidaan siis nähdä, että  $x = \cos(\omega)$  ja  $y = \sin(\omega)$ .



3. Kompleksilukuja suorakulmaisessa ja polaarikoordinaatistossa.

- a) Polaarik.:  $z z^* = r e^{j\theta} r e^{-j\theta} = r^2 e^{j(\theta-\theta)} = r^2$ , suorakulmainen:  $z z^* = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2$ .
- b)  $(z_1 + z_2)^* = (x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2)^* = (x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2))^* = x_1 + x_2 - j(y_1 + y_2) = x_1 - jy_1 + x_2 - jy_2 = z_1^* + z_2^*$

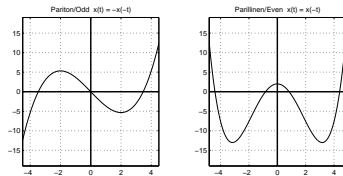


4. Parilliset ja parittomat funktiot:

Funktio  $f(x)$  on pariton, jos  $f(-x) = -f(x)$  (kuvassa vasemmalla)  
Funktio  $f(x)$  on parillinen, jos  $f(-x) = f(x)$  (oikealla).

Sini on pariton funktio ja kosini on parillinen funktio. Mikä tahansa funktio  $f(x)$  voidaan ilmaista parittoman ja parillisen komponentin summana:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Even}\{f(x)\} + \text{Odd}\{f(x)\}, \text{ missä} \\ \text{Even}\{f(x)\} &= 1/2[f(x) + f(-x)] \\ \text{Odd}\{f(x)\} &= 1/2[f(x) - f(-x)] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Even}\{H(\omega)\} &= \text{Even}\{e^{j\omega}\} = \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) + \cos(-\omega) + j\sin(-\omega)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) + \cos(\omega) - j\sin(\omega)) = \cos(\omega) \\ \text{Odd}\{H(\omega)\} &= \text{Odd}\{e^{j\omega}\} = \frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) - \cos(-\omega) + j\sin(-\omega)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) - \cos(\omega) + j\sin(\omega)) = j\sin(\omega) \end{aligned}$$

5. Tutkitaan kompleksilukuarvoista funktiota  $H(\omega) = 1 - e^{-j\omega}$ . Lasketaan taulukkoon ky-sytyt arvot. Jos laskimesi tukee kompleksiarvoisen eksponenttifunktion laskemista, voit käyttää suoraan  $H(\omega) = 1 - e^{-j\omega}$ , muuten hajota Eulerin kaavalla  $H(\omega) = 1 - \cos(\omega) + j\sin(\omega)$ .

Huomaa parillisen kosinin ja parittoman sinin laskusäännöt:  
 $\cos(-\omega) = \cos(\omega)$  ja  $\sin(-\omega) = -\sin(\omega)$ .

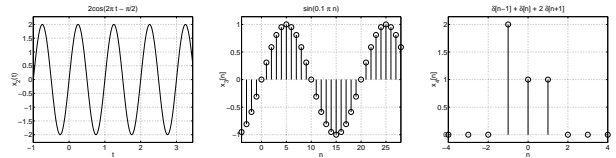
$\omega$	$H(\omega)$	$ H(\omega) $	$\angle H(\omega)$
0	0	0	0 *
$\pi/4$	$0.2929 + 0.7071j$	0.7654	$0.3750 \pi$
$\pi/2$	$1.0000 + 1.0000j$	1.4142	$0.2500 \pi$
$3\pi/4$	$1.7071 + 0.7071j$	1.8478	$0.1250 \pi$
$\pi$	2	2	0

\*) epäjatkuvuuskohta,  $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle H(\omega) = +0.5\pi$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle H(\omega) = -0.5\pi$ .

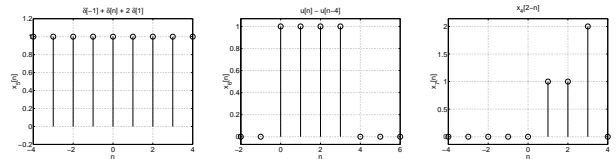
Vaihtoehtoisesti voit ajatella laskun "osoittimien" avulla  $H_1(\omega) + H_2(\omega)$ :  $H_1(\omega) = 1$ , joka on siis vakio ja jolla siirrytään origosta kohtaan (1,0), ja summataan siihen  $H_2(\omega) = -e^{-j\omega}$ , joka piirtää 1-säteisen yksikköympyrän puolikkaan.

6. Piirrä seuraavat signaalit ja sekvenssit origon ( $t = 0$  tai  $n = 0$ ) ympärillä.

- a)  $x_2(t) = 2 \cos(2\pi t - \pi/2)$
- b)  $x_3[n] = \sin(0.1\pi n)$
- c)  $x_4[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + 2\delta[n+1]$



- d)  $x_5[n] = \delta[-1] + \delta[0] + 2\delta[1]$
- e)  $x_6[n] = u[n] - u[n-4]$
- f)  $x_7[n] = x_4[2-n]$



7. Jaksolliselle jatkuvalle signaalille on olemassa vakio  $T > 0$ , jolle  $x(t) = x(t+T)$  kaikilla  $t$ :n arvoilla. Perusjako  $T_0$  on lyhyin jakso. Sijoituksen  $t \leftarrow t+T$  jälkeen yritetään etsiä vakioita  $T$  perustuen sinin/kosinin/eksponenttifunktion  $2\pi$ -jaksollisuuteen.

a)  $x(t)$  on jaksollinen ja perusjako on  $T_0 = 31/4$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}t\right) \\ x(t+T) &= 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}(t+T)\right) = 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}t + 2\pi\left(\frac{4}{31}T\right)\right) \end{aligned}$$

Huomaa siis, että  $T$  tulee valita niin, että alemman lausekkeen vaihe siirto on joku  $2\pi$ -monikerta:  $\cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos(\omega t + 4\pi) = \dots$

b)  $x(t)$  on jaksollinen ja perusjako on  $T_0 = 2$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{j(\pi t - 1)} \\ x(t+T) &= e^{j(\pi(t+T) - 1)} = e^{j(\pi t - 1) + \pi T} \end{aligned}$$

c)  $x(t)$  ei ole jaksollinen, koska ei löydetä arvoa  $T_0$ , joka tuottaisi kulmaan  $2\pi$ -monikerran muutoksen jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\left(\frac{\pi}{8}t^2\right) \\ x(t+T) &= \cos\left(\frac{\pi}{8}(t+T)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}t^2 + 2\pi\left(\frac{tT}{8} + \frac{T^2}{16}\right)\right) \end{aligned}$$

8. Jaksolliselle diskreetille signaalille on olemassa vakio  $N \in \mathbb{Z}_+$ , jolle  $x[n] = x[n+N]$ , kaikille  $n \in \mathbb{Z}$ .

a)  $x[n]$  on jaksollinen perusjaksolla  $N_0 = 31$ . Huomaa ero edellisen tehtävän a-kohtaan! Katso kuvaa 19:

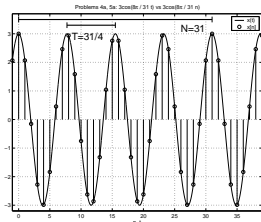
$$\begin{aligned} x[n] &= 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}n\right) \\ x[n+N] &= 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}(n+N)\right) = 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}n + 2\pi\left(\frac{4}{31}N\right)\right) \end{aligned}$$

josta  $(4/31)N = k$ , jossa  $N, k \in \mathbb{Z}$ , ja edelleen  $N = (31/4)k$ . Näin ollen pienin jakso  $N_0$  (eli perusjako) on 31. Huomaa, että se on eri kuin kohdassa 4a.

b)  $x[n]$  ei ole jaksollinen, koska yksikään  $16\pi$ :n monikerta ei ole kokonaisluku:

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right) \\ x[n+N] &= \cos\left(\frac{n+N}{8} - \pi\right) = \cos\left(\frac{n}{8} - \pi + 2\pi\frac{N}{16\pi}\right) \end{aligned}$$

c)  $x[n]$  on jaksollinen. Lasketaan kuitenkin kosinin jakso erikseen, jolloin saadaan  $N_1 = 8$  ja  $N_2 = 12$ . Perusjako on jaksosten pienin yhteinen jaettava eli  $24 = 3 \cdot N_1 = 2 \cdot N_2$ .



Kuva 19: Vastaus 8: Tehtävien 7a ja 8a ero!

9. Tarkastellaan kolmea järjestelmää  $S_1, S_2$  ja  $S_3$ , joiden syöte-vasterelaatiot ovat:

$$\begin{aligned} S_1 : y[n] &= x[n] + 2x[n-2] \\ S_2 : y[n] &= x[n] - 3x[n-1] - 2x[n-2] \\ S_3 : y[n] &= \begin{cases} x[n/2], & n \text{ parillinen} \\ 0, & n \text{ pariton} \end{cases} \end{aligned}$$

a) Piirrä ensin lukujono  $x[n]$ . Ulostulo voidaan laskea vaikkapa yksinkertaisella taulukolla.

$n$	$x[n]$	$2x[n-2]$	$y_1[n]$	$-3x[n-1]$	$-2x[n-2]$	$y_2[n]$	$y_3[n]$
0	3	0	3	0	0	3	3
1	2	0	2	-9	0	-7	0
2	-2	6	4	-6	-6	-14	2
3	0	4	4	6	-4	2	0
4	0	-4	-4	0	4	4	-2
5	0	0	0	0	0	0	0

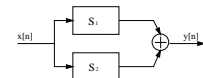
b)  $S_1$  ja  $S_2$  sarjassa. Vaste saadaan sijoittamalla edellisen järjestelmän vaste aina seuraavaan.



$S_1$ :n jälkeen  $y_1[n] = x[n] + 2x[n-2]$ , joka sijoitetaan syötteenä  $S_2$ :en:

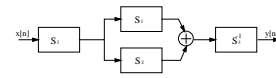
$$\begin{aligned} y_2[n] &= y_1[n] - 3y_1[n-1] - 2y_1[n-2] \\ &= (x[n] + 2x[n-2]) - 3(x[n-1] + 2x[n-3]) - 2(x[n-2] + 2x[n-4]) \\ &= x[n] - 3x[n-1] - 6x[n-2] - 3x[n-3] - 4x[n-4] \end{aligned}$$

c)  $S_1$  ja  $S_2$  rinnan. Vaste saadaan laskemalla haarat yhteen.



$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] + 2x[n-2]) + (x[n] - 3x[n-1] - 2x[n-2]) \\ &= 2x[n] - 3x[n-1] \end{aligned}$$

d\*) Ensin  $S_3$ , sitten  $S_1$  ja  $S_2$  rinnan, ja lopuksi invertoitu  $S_3$



Käänteiseksi järjestelmäksi  $(x[n] \rightarrow S_1 \rightarrow S_3^{-1} \rightarrow x[n])$  saadaan  $S_3^{-1} : y[n] = x[2n]$ . Koska diskreetti järjestelmä on määritelty vain, kun  $n$  on kokonaisluku, on  $y[n] = 0$  aina kun  $n$  ei ole kokonaisluku.

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \begin{cases} x[n/2], & n \text{ parillinen} \\ 0, & n \text{ pariton} \end{cases} \\ y_2[n] &= 2y_1[n] - 3y_1[n-1] = 2x\left[\frac{n}{2}\right] - 3x\left[\frac{n-1}{2}\right] \\ y_3[n] &= y_2[2n] = 2x\left[\frac{2n}{2}\right] - 3x\left[\frac{2n-1}{2}\right] = 2x[n] - 3x[n-1] \end{aligned}$$

Kokeile vaikkapa syötteellä  $x[n] = (1, 2, 0, -2)$ .

Lineaarille ja aikainvariantille järjestelmille pätee, että niiden keskinäistä järjestystä voidaan muuttaa lopputuloksen muuttumatta.

Koska järjestys  $S_3 \rightarrow S_3^{-1} \rightarrow$  (rinnan  $(S_1, S_2)$ ) antaa eri tuloksen kuin yllä laskettu järjestys, kaikki kolme (neljä) järjestelmää eivät ole lineaarisia ja aikainvariantteja.

10. Huomaa, että  $S_3$  on lineaarikombinaatio kahdesta ensimmäisestä järjestelmästä

$$\begin{aligned} S_1 : y_1[n] &= 0.5x[n+1] \\ S_2 : y_2[n] &= -0.5x[-n-1] \\ S_3 : y_3[n] &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

a) Järjestelmä on **muistiton** (Oppenheim s.44), kun sen vaste riippuu vain sen hetkisestä syötteestä, esimerkiksi  $y[n] = (x[n])^2 + 2x[n]$ . Järjestelmässä ei siis tarvita "muistirekistereitä" välituloksia tai sisääntulon puskuria varten.

Järjestelmää  $S_2$  tarkastelemalla havaitaan vasteen muodostuvan termin  $x[-n-1]$  avulla, joten  $S_2$  on muistillinen. Myös muut ovat yhtäläisiä muistillisia.

b) Järjestelmä on **lineaarinen** (s. 53), kun se on additiivinen ja skaalautuva eli

$$\begin{aligned} \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) &\rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \\ \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] &\rightarrow \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \end{aligned}$$

Linearisuuden osoittaminen voidaan tulkita kuvan 20 mukaan. Olkoon käytössä kaksi mielivaltaista syötettä  $x_1[n]$  ja  $x_2[n]$ . Tutkitaan, tuottaako näiden vastaiden lineaarikombinaatio saman tuloksen kuin syötteiden lineaarikombinaation vaste.

Merkitään syötteiden  $x_1[n]$  ja  $x_2[n]$  vasteita  $y_1[n]$  ja  $y_2[n]$ :lla:

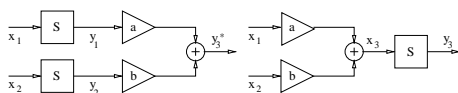
$$\begin{aligned} x_1[n] &\rightarrow y_1[n] = 0.5(x_1[n+1]) \\ x_2[n] &\rightarrow y_2[n] = 0.5(x_2[n+1]) \end{aligned}$$

Näiden vastaiden lineaarikombinaatio on kuvan 20 vasemman puoleisen kaavion ulostulo  $y_3^*[n]$ :

$$\begin{aligned} y_3^*[n] &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \\ &= \alpha 0.5(x_1[n+1]) + \beta 0.5(x_2[n+1]) \end{aligned}$$

Tutkitaan sitten kuvan 20 oikeanpuoleista kaaviota eli nyt syötteenä järjestelmään on alkuperäisten syötteiden lineaarikombinaatio  $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ :

$$\begin{aligned} y_3[n] &= 0.5(x_3[n+1]) \\ &= 0.5(\alpha x_1[n+1] + \beta x_2[n+1]) \\ &= 0.5\alpha(x_1[n+1]) + 0.5\beta(x_2[n+1]) \end{aligned}$$



Kuva 20: Lineaarille järjestelmälle S pätee  $y_3 = y_3^*$ . Tässä \* on vain eri ulostulot erottava symboli, ei kompleksikonjugaatti tai mikään muu funktio.

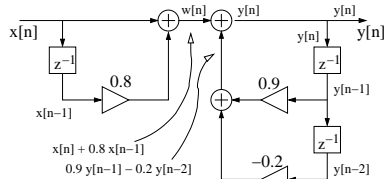
Koska  $y_3[n] = y_3^*[n]$ , niin järjestelmä  $S_1$  on siis lineaarinen. Linearisessa järjestelmässä voidaan hyödyntää superpositiota esimerkiksi siihen, että sisääntulona jaetaan pienempiin osiin, suodatetaan (läpi järjestelmän) erikseen, ja kootaan tulos lopuksi yhteen.

Voidaan myös laskea vastaavasti, että  $S_2$  on myös lineaarinen, samoin kuin niiden lineaarikombinaatio  $S_3$ .

11. \*LTI vaatii sekä lineaarisuuden että aikainvarianttisuuden.

- a) Ei ole lineaarinen (vakion lisääminen). On kausaalinen. Ei ole LTI.
- b) Ei stabiili (negatiiviset arvot!). Ei kausaalinen. Ei ole LTI.
- c) Ei ole lineaarinen (signaalin neliö). On aikainvariantti. Ei ole LTI.
- d) Ei ole aikainvariantti (ei vakioeroa) eikä stabiilikkaan. Ei ole LTI.

12. Suotimen rakenteessa on vain vakiolla kertomista (kolmiot), signaalien summaamista (ympyrät plus-merkillä) ja signaalien viivästämistä (muistirekisteri, viive,  $D$  tai  $z^{-1}$  neliössä). Tällöin suodin on LTI (lineaarinen ja aikainvariantti/siirtoinvariantti).



Kuva 22: Tehtävän 12 LTI-suodinrakenteen apumuuttujineen.

Kuvaan 22 on piirretty muutama apumerkintä tulkintaa varten. Suodin voidaan tulkita koostuvan kahden osasuotimen sarjaankytkennästä. Vasemmalla puolella on suodin, jonka ulostulo  $w[n] = x[n] + 0.8x[n-1]$  käyttäen apumuuttujaa  $w[n]$ . Tämä syötetään oikean puoleiseen lohkokon, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} y[n] &= w[n] + 0.9y[n-1] - 0.2y[n-2] \\ &= x[n] + 0.8x[n-1] + 0.9y[n-1] - 0.2y[n-2] \end{aligned}$$

Huomaa, että vasemmanpuoleisessa lohossa laskenta menee "eteenpäin", eikä siinä ole suljettua takaisinkytkettyä silmukkaa.

Oikeanpuoleisessa lohossa ulostulona on  $y[n]$ . Sama  $y[n]$  on jo olemassa viimeisen summauksen jälkeen ja kopioituun siis sekä ulostulona että alhaalle menevään silmukkaan. Täten laskentaan tulee mukaan  $y[n]$ :n eli ulostulosekvenssin edellisiä arvoja. Laskenta on rekursiivista, kun rakenteessa on silmukka.

Suotimen asteluku voidaan päätellä viiveiden määrästä.

Suotimen asteluku on tässä tapauksessa kaksi. Eteenpäin menevässä vasemmanpuoleisessa osassa on yksi viive eli sen lohkon asteluku on yksi. Kaskadissa eli sarjassa on toinen, oikeanpuoleinen lohko, jossa on kaksi viivettä eli sen asteluku on kaksi. Kun nämä ovat kaskadissa, voidaan asteluvuksi ottaa maksimi lohkojen asteluvuista eli kaksi.

Suotimen asteluku nähdään voidaan myös nähdä suotimen taajuusvasteen  $H(e^{j\omega})$  tai siirtofunktio  $H(z)$  nimittäjä- ja osoittajapolynomien asteluvun maksimista. Samoin siirtofunktio  $H(z)$  piirretään usein polynomien juuret (nollat osoittajapolynomien ja navat nimittäjäpolynomien juuret) niin sanottuun napa-nollakuvioon. Tällöin asteluku on maksimi navoista ja nollista.

c) Järjestelmä on **aikainvariantti** (s.50), kun järjestelmän käyttäytyminen ei muutu ajan mukana. Aikainvarianttisuuden osoittaminen voidaan tulkita kuvan 21 mukaan. Tutkitaan tilannetta, jossa syötettä viivästetään ja sitten syötetään järjestelmään (yläkuva) ja tilannetta, jossa vastetta viivästetään (alakuva). Jos ulostulot ovat samoja, järjestelmä on aikainvariantti.

Tunnetaan järjestelmän  $S_2$  vaste mielivaltaiselle sekvenssille  $x_1[n]$

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = -0.5x_1[-n-1]$$

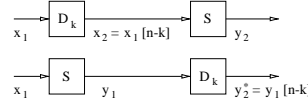
Viivästetään tätä vastetta  $k$  yksikköä:

$$y_2^*[n] = y_1[n-k] = -0.5x_1[-(n-k)-1] = -0.5x_1[-n-1+k]$$

Tutkitaan toisaalta viivästettyä syötettä  $x_2[n] = x_1[n-k]$ :

$$y_2[n] = -0.5x_2[-n-1] = -0.5x_1[-(n-1)-k] = -0.5x_1[-n-1+k]$$

Jos järjestelmä on aikainvariantti, on oltava  $y_2[n] = y_2^*[n]$ .



Kuva 21: Aikainvariantille järjestelmälle S pätee  $y_2 = y_2^*$ . Ylemmässä kuvassa "siirretään"  $x_1$ :ä, alemmassa  $y_1$ :ä.

Koska  $y_2[n] \neq y_2^*[n-k]$ , ei järjestelmä  $S_2$  ole aikainvariantti. Sen sijaan järjestelmä  $S_1$  on aikainvariantti! Osoita!

d) Järjestelmä on **stabiili** (s. 48), kun järjestelmä antaa rajoitetun vasteen aina kun syöte on rajoitettu (BIBO = bounded input, bounded output). Oletetaan siis, että järjestelmän  $S_3$  syötteelle tiedetään

$$\max |x[n]| \leq B \forall n,$$

jolloin saadaan (kohdassa  $S_3$  kolmioepäyhtälöä  $|a-b| \leq |a| + |b|$  hyväksikäyttämällä)

$$|y_3[n]| = \left| \frac{x[n+1] - x[-n-1]}{2} \right| \leq \frac{|x[n+1]| + |x[-n-1]|}{2} \leq \frac{B+B}{2} = B.$$

Eli järjestelmä  $S_3$  on stabiili, kuten myös sen osatkin.

e) Järjestelmä on **kausaalinen** (s. 46), kun järjestelmän vaste  $y(t)$  riippuu vain syötteestä  $x(t)$  ajanhetkenä  $t$  sekä menneisyydessä. Kausaalinen järjestelmä on realisoitavissa (sisältää viivästyskykyä, ei aikaistuksia), se ei siis käytä laskennassa tulevaisuuden arvoja.

Järjestelmän  $S_1$  vaste riippuu kuitenkin termistä  $x[n+1]$ , eli  $S_1$  ei ole kausaalinen. Järjestelmän  $S_2$  kausaalisuutta pitää tarkastella myös negatiivisilla  $n$ :n arvoilla, jolloin huomataan, ettei sekään ole kausaalinen.

$$\begin{aligned} y_1[5] &= 0.5x_1[6] \\ y_2[5] &= -0.5x_2[-6] \\ y_2[-5] &= 0.5x_2[4] \end{aligned}$$

Mainittakoon vielä, että sama matemaattinen/laskennallinen malli voidaan toteuttaa useilla erilaisilla suodinrakenteilla. Kuvan rakenne on niin sanottu suoran muodon esitys (direct form).

13. Diskreetti-aikainen kausaalinen<sup>2</sup> LTI-järjestelmä voidaan esittää lineaarisena vakiokertoimisena differenssiyhtälönä

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

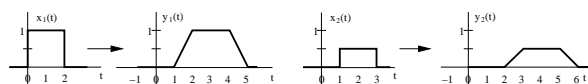
jossa on siis vain vakioilla skaalattujen ( $a_k, b_k$ ) ja viivästettyjen ( $[n-k]$ ) sekvenssien summia. Jos mukana on viivästettyjä  $y$ -termejä, tarkoittaa se yleensä takaisinkytkettyä, rekursiivista järjestelmää (IIR). Toisessa tapauksessa suodin on FIR.

Huomaa LTI-järjestelmälle "sallitut rakennuspalikat": signaalin haarautuminen (molempiin haaroihin sama signaali), signaalien yhteenlasku, signaalin kertominen vakiolla (kolmio näissä kuvissa) ja viiveyksiköt (joko  $D$  tai  $z^{-1}$ ). Halutessaan voi siis kirjoittaa kuvaajat i-v auki sopivaksi  $y:n$  ja  $x:n$  esitykseksi, kohta iv on helpoin:  $y[n] = 0.5x[n] - \cos(\pi/4)$ .

- a) LTI ovat i, ii, iii. Kuvassa iv alemmasta haarasta tulee vakiotermi  $-\cos(\pi/4)$ , eikä järjestelmä ole LTI. Miksi? Kuvassa v operaatio on signaalien kertolasku, eikä järjestelmä ole LTI. Miksi?
- b) Takaisinkytkettyjä (IIR) ovat i, ii, iii. Niiden impulssivaste on äärettömän pitkä. Tehtävässä 19 on esimerkki järjestelmästä, jota ei ole takaisinkytketty ja jonka impulssivasteen pituus on siten äärellinen (Finite length Impulse Response). Tehtävän 20 järjestelmä on taasen takaisinkytketty IIR (Infinite length Impulse Response).

14. Käyttämällä hyväksi lineaaristen aikainvarianttien järjestelmien ominaisuuksia (additiivisuus, skaalaus, siirto ajassa) voidaan havaita, että signaali  $x_2(t)$  voidaan muodostaa skaalamalla ja viivästämällä  $x_1(t)$ :ä  $x_2(t) = 0.5x_1(t-1)$ . Tällöin myös vaste  $y_2(t)$  saadaan skaalalaamalla ja viivästämällä eli  $y_2(t) = 0.5y_1(t-1)$ . Katso kuva 23.

Vastaavasti syöte  $x_1$  voidaan ajatella koostuvan esimerkiksi kahdesta yhden leveyisestä suorakulmiosta, joista toista on vain viivästetty yhden verran enemmän.



Kuva 23: Vastaus 14: LTI:n ominaisuuksien avulla voidaan esittää  $y_2$

15. Lasketaan diskreetti-aikainen, äärellisen pitkä (tässä tapauksessa lyhyt) konvoluutisumma käyttäen määritelmää

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

<sup>2</sup>ei-kausalisessa tapauksessa tulisi indeksin  $k$  negatiivisia arvoja mukaan

a) Lasketaan tämä tehtävä skaalattujen ja siirrettyjen sekvenssien summana (s. 79-81, Example 2.1):

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\
 &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[n-k] = \overbrace{h[0]}^{=1} x[n-0] + \overbrace{h[1]}^{=-1} x[n-1] \\
 &= x[n] - x[n-1] = \{1, (3-1), (2-3), -2\} \\
 &= \{1, 2, -1, -2\}
 \end{aligned}$$

Summauksen rajat 0 ja 1 tulivat siis siitä, että  $h[n]$  on nolla kaikilla muilla indekseillä.

b) Lasketaan tämä tehtävä liu'uttaen yksi ulostulon piste kerrallaan (s. 81-82, Example 2.2):

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\
 &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[n-k]
 \end{aligned}$$

Nyt lasketaan kiini siis piste kerrallaan, mikä graafisesti vastaa sekvenssien liu'uttamista toistensa yli, kun toinen sekvensseistä on käännetty. Liu'utus (x-akseli) tapahtuu siis indeksiin k suhteen.

$$\begin{aligned}
 y[0] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[0-k] = h[0]x[0] + h[1]x[-1] \\
 &= (1 \cdot 0) + (-1 \cdot 0) = 0 \\
 y[1] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[1-k] = h[0]x[1] + h[1]x[0] \\
 &= (1 \cdot 2) + (-1 \cdot 0) = 2 \\
 y[2] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[2-k] = h[0]x[2] + h[1]x[1] \\
 &= (1 \cdot 3) + (-1 \cdot 2) = 1 \\
 y[3] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[3-k] = h[0]x[3] + h[1]x[2] \\
 &= (1 \cdot 0) + (-1 \cdot 3) = -3 \\
 y[4] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[4-k] = h[0]x[4] + h[1]x[3] \\
 &= (1 \cdot 0) + (-1 \cdot 0) = 0
 \end{aligned}$$

Näin ollen  $y[n] = 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - 3\delta[n-3]$ . Huomaa, että tässä b-tehtävässä  $x[n]$  alkoi "viivästettynä", joten myös ulostulo on viivästetty.

Ulostulosekvenssin pituus on kahden konvoloitavan sekvenssin summa miinus 1. Katso seuraava tehtävä.

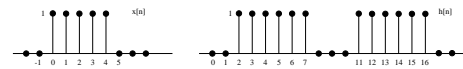
16. Lasketaan konvoluutio kun

a)  $x[n]$  ja  $h[n]$  ovat kuvan 24 kaltaiset. Tehtävässä konvoluutio voidaan ajatella kuvassa 25 esitetyllä tavalla, jolloin käytetään edellisen tehtävän b-kohdan liu'utusta. Impulssivasteessa  $h[n-k]$  esiintyvä termi  $-k$  aiheuttaa ensimmäkin, että sekvenssiä  $h$  tarkastellaan "kiepauttamalla" se ympäri, kun taas termi  $n$  aiheuttaa siirroksen, joka esimerkiksi kuvassa 25 on  $n = 3$ .

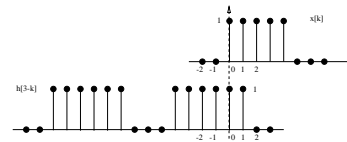
Konvoluution tuloksen kohdassa  $n = 3$  saadaksen on vain kerrottava ne  $x[k]$  ja  $h[3-k]$  arvot keskenään, jotka poikkeavat nolasta samalla kohdalla ja summattava nämä yhteen:  $y[3] = \sum_{k=0}^5 h[k]x[3-k]$ . Tämä tehdään kaikille  $n$  arvoille. Lopputuloksena saadaan syötteelle  $x[n]$  kuvassa 26 esitetyn kaltainen vaste.

Huomaa, että sekvenssien pituudet ovat  $\text{Length}\{x[n]\} = 5$ ,  $\text{Length}\{h[n]\} = 15$  (osa arvoista on nollia) ja  $\text{Length}\{y[n]\} = 15 + 5 - 1 = 19$ .

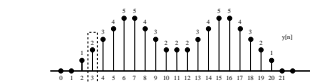
Huomaa myös, että ulostulon ensimmäinen nolasta eroava kohta on summa konvoloitavien sekvenssien vastaavista aloituskohdista (indeksinumeroita). Eli  $\text{Start}\{h[n]\} = 2$  ja  $\text{Start}\{x[n]\} = 0$ , niin  $\text{Start}\{y[n]\} = \text{Start}\{h[n]\} + \text{Start}\{x[n]\} = 2$ .



Kuva 24: Tehtävä 16: Järjestelmän syöte  $x[n]$  ja impulssivaste  $h[n]$ .



Kuva 25: Konvoluution tulos, kun  $n = 3$ . Syöte ja impulssivaste menevät päällekkäin kohdissa  $k = 0$  ja  $k = 1$  tuottaen arvon 2.



Kuva 26: Vastaus 16: Konvoluution tulos  $y[n]$ , korostettuna kohta  $n = 3$  eli  $y[3] = \sum_{k=0}^5 x[k]h[3-k] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

b\*)  $x[n] = \alpha^n u[n]$   
 $h[n] = \beta^n u[n]$

Muistetaan, että geometrisen sarjan summa, jossa suhdeluku on  $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Konvoluutiolausekkeeksi saadaan

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \beta^{n-k} u[n-k].$$

Tarkastelemalla askelfunktioita havaitaan, että  $u[k] = 1$ , kun  $k \geq 0$ , ja  $u[n-k] = 1$ , kun  $k \leq n$ . Summalauseke poikee siis nolasta kun  $x \in [0, n]$ , eli

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{-k}.$$

Kyseessä on nähtävästikin geometrisen sarjan summa, jossa suhdeluku  $q = \frac{\alpha}{\beta}$ . Kannattaa muistaa, että kun  $n \rightarrow \infty$  on oltava  $|q| < 1$ , jotta sarja olisi rajoitettu. Sarjalle

$$y[n] = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}.$$

17. LTI-systeemien assosiativisuudesta seuraa, että

$$h_2[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (h_2[n] * h_2[n]) * h_1[n].$$

Kun systeemin  $h_2[n]$  impulssivaste ja koko systeemin impulssivaste  $h[n]$  ovat tehtävässä annettuja, voidaan päätellä impulssivaste  $h_1[n]$ . Prosessia kutsutaan *dekonvoluutioksi*.

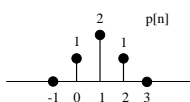
Lasketaan ensin konvoluutio  $h_2[n] * h_2[n]$  ja merkitään tätä vaikka  $p[n]$ :llä:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]h_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[k] - u[k-2])(u[n-k] - u[n-k-2])$$

konvoluution termi  $u[k] - u[k-2]$ , jossa kaksi askelfunktioita on vähenetty toisistaan, poikkeaa nolasta k:n arvoilla 0 ja 1, joten konvoluutioksi saadaan

$$p[n] = \sum_{k=0}^1 u[n-k] - u[n-k-2] = (u[n-0] - u[n-2]) + (u[n-1] - u[n-3])$$

Tämän perusteella saadaan vasteeksi  $p[0] = 1$ ,  $p[1] = 2$  ja  $p[2] = 1$ , muuten konvoluution tulos on nolla. (Ylläoleva voidaan toki laskea  $(\delta[n] + \delta[n-1])$  eli  $\{1, 1\}$  konvoluutiona itsensä kanssa.) Systeemin  $h_2[n] * h_2[n]$  impulssivasteeksi saadaan siis :



a) Impulssivaste  $h_1[n]$  saadaan *dekonvoluutiolla*. Impulssivasteen  $h_1[n]$  nolasta poikkeava pituus on  $N_{h1} = N_h + 1 - N_p$  eli tässä tapauksessa  $N_{h1} = 7 + 1 - 3 = 5$ . Konvoluutiotuloksen aloituskohdan on summa konvoloitavien aloituskohdista eli  $A_{h1} = A_h - A_p = 0 - 0 = 0$ . Tarkastelun perusteella siis tiedetään, että  $h_1$  on muotoa

$$h_1[n] = a\delta[n] + b\delta[n-1] + c\delta[n-2] + d\delta[n-3] + e\delta[n-4]$$

Tehtävän voi miettiä konvoluution kautta parillakin tavalla, joissa etsitään  $h_1$ :lle sopivia kertoimia:

$$h[n] = \sum_{k=0}^2 p[k]h_1[n-k]$$

joka voidaan avata, koska  $p[n]$  tunnetaan:

$$1 \cdot h_1[0] + 2 \cdot h_1[n-1] + 1 \cdot h_1[n-2] = h[n],$$

Toinen vaihtoehtoinen tapa on ajatella haettava sellaisia skalauskertoimia  $h_1[n]$ , joilla saa impulssivasteen  $h[n]$  esitettyä  $p[n]$ :n superpositioina, eli

$$\begin{aligned}
 h[n] &= \sum_{k=0}^4 h_1[k]p[n-k] \\
 &= h_1[0]p[n] + h_1[1]p[n-1] + h_1[2]p[n-2] + h_1[3]p[n-3] + h_1[4]p[n-4]
 \end{aligned}$$

Kuvassa 27 on esitetty, miten  $h_1[n]$ :n arvot etsitään ja saadaan lopulta siis muotoon

$$\begin{aligned}
 h[n] &= h_1[0]p[n] + h_1[1]p[n-1] + h_1[2]p[n-2] + h_1[3]p[n-3] + h_1[4]p[n-4] \\
 &= p[n] + 3p[n-1] + 3p[n-2] + 2p[n-3] + p[n-4] \\
 &= \delta[n] + 5\delta[n-1] + 10\delta[n-2] + 11\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 4\delta[n-5] + \delta[n-6] \\
 \Rightarrow h_1[n] &= \delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]
 \end{aligned}$$

b) Voidaan laskea normaalin konvoluutiona (jo ennen a-kohdan laskemistakin). Kytety väste on kahden impulssivasteen superpositio, jossa siis vähennetään yhdellä askeleella positiiviseen suuntaan siirretty impulssivaste alkuperäisestä impulssivasteesta eli  $h[n] - h[n-1]$ , joka on esitetty kuvassa 28.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = h[n] - h[n-1]$$

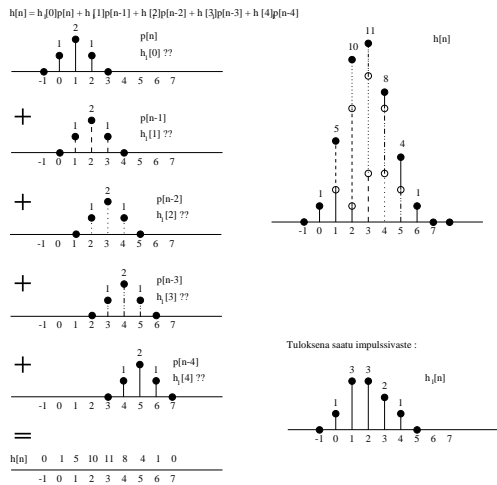
18. Tehtävän ideana on vain huomata, että LTI-järjestelmissä tarvittaessa voimme jakaa joko signaalin tai impulssivasteen osiin. Lasketaan ensin "raa'asti" eli käytetään konvoluution määritelmää.

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] \\
 &= \sum_k 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{n+3} 3^{-|k|} (1/4)^{n-k}
 \end{aligned}$$

Sitten oletetaan tunnetuksi konvoluution osittelulaki:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= 3^n u[-n-1] * (1/4)^n u[n+3] + (1/3)^n u[n] * (1/4)^n u[n+3] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3^k u[-k-1] \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n+3-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u[k] \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n+3-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\min(-1, n+3)} 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n+3} 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}
 \end{aligned}$$





Kuva 27: Tehtävä 17a: Dekonvoluutio

Jos nyt  $n + 3 > -1$ , saadaan

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n+3} 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{n+3} 3^{-|k|} (1/4)^{n-k}$$

Jos taas  $n + 3 < -1$  on jälkimmäinen summa nolla ja ensimmäisestä summasta tulee

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+3} 3^{-|k|} (1/4)^{n-k}$$

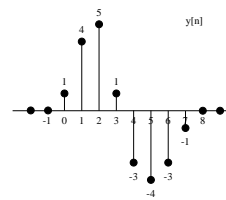
eli saadaan sama tulos kuin ilman osittelulain käyttöä.

19. Tarkastellaan systeemiä, joka on määritelty differenssiyhtälönä

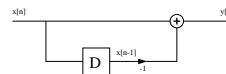
$$y[n] = x[n] - x[n-1].$$

a) Systeemin lohkoavaio (D on viive):

Nähdään siis, että laskenta "etenee" vasemmalta oikealle, eikä takaisinkytkentää ole. Tästä voidaan jo ennakoita, että impulssivaste on äärellisen pitkä (FIR).



Kuva 28: Tehtävä 17b: Vaste syötteen  $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ .



b) Impulssivaste  $h[n]$  on systeemin vaste yksikköimpulssiin  $\delta[n]$ . Laitetaan siis syötteenä  $\delta[n]$  eli ykkönen ajanhetkellä  $n = 0$  ja saadaan

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

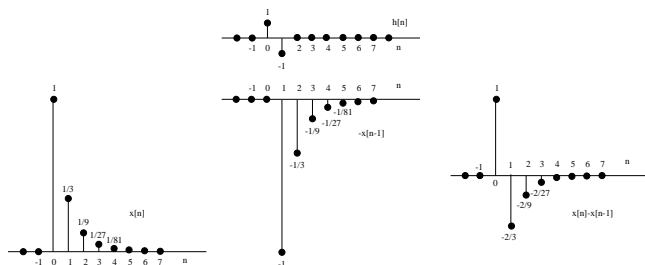
n	x[n]	-x[n-1]	y[n] = x[n] - x[n-1]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	-1	-1
2	0	0	0
3	0	0	0

FIR-tapauksissa (differenssiyhtälöissä ei ole viivastettuja  $y$ -termejä mukana) suotimen impulssivaste saadaan siis suoraan differenssiyhtälöstä vaihtamalla  $y$   $h$ :ksi ja  $x$   $\delta$ :ksi.

c) Systeemin vaste syötellä  $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$  on laskettu alle ja piirretty kuvaan 29.

$$y[n] = x[n] - x[n-1] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left[\frac{1}{3} u[n] - u[n-1]\right]$$

n	x[n]	-x[n-1]	y[n] = x[n] - x[n-1]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	1/3	-1	-2/3
2	1/9	-1/3	-2/9
3	1/27	-1/9	-2/27
4	1/81	-1/81	-2/81
..	..	..	..

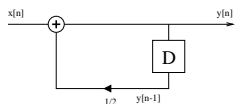


Kuva 29: Vastaus 19: Vasteen laskeminen. Vasemmalla  $x[n]$ , keskellä ylhäällä impulssivaste  $h[n]$  ja alhaalla  $-x[n-1]$  ja oikealla vaste  $y[n] = \sum h[k]x[n-k]$ .

20. Tarkastellaan systeemiä, joka on määritelty differenssiyhtälönä

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \implies y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

a) Systeemin lohkoavaio (D on viive):



Nyt nähdään, että kaaviossa on takaisinkytkentä. Tämä tarkoittaa siis toisin sanoen rekursiivista laskentaa eli että ulostulon laskemiseksi tarvitaan joitakin entisiä ulostulon arvoja. Impulssivasteen pituudeksi tulee ääretön (IIR); käytännön asioihin ei tässä puututa (bittimäärä rajoittaa esitystarkkuuden).

Esimerkiksi Fibonaccin lukujonon voi hyvin helposti esittää rekursiivisessa muodossa kahden edellisen luvun avulla, mutta se on mahdollista myös yhtä lailla esittää ei-rekursiivisena (FIR).

b) Impulssivaste  $h[n]$  saadaan syöttämällä systeemiin yksikköimpulssi  $\delta[n]$ :

n	x[n]	1/2 y[n-1]	y[n] = x[n] + 1/2 y[n-1]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1/2	1/2
2	0	1/4	1/4
3	0	1/8	1/8
4	0	1/16	1/16
..	..	..	..

Nähdään, että  $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ .

c\*) Differenssiyhtälöiden ratkaiseminen tapahtuu kahdessa vaiheessa. Ensinnäkin ratkaistaan homogeeninen yhtälö, jossa häiriötermi  $x[n]$  on asetettu nolaksi. Tyypillinen yrite on  $y[n] = z^n$ . Erityisen yhtälön ratkaisu taas saavutetaan yrittämällä, joka on samaa muotoa häiriötermin kanssa. Koko yhtälön ratkaisu on näiden kahden ratkaisun lineaarinen yhdistelmä

$$y[n] = Ay_h[n] + By_p[n],$$

jossa  $A$  saadaan mahdollisesta alkuehdosta ja  $B$  erityisen yhtälön ratkaisusta. Toimitaan edellä kerrottuun tapaan tehtävää ratkaistessa.

H.Y.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 0, \text{ sij. yrite } y = z^n \implies z^n - \frac{1}{2}z^{n-1} = 0 \implies z = \frac{1}{2}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisuksi saadaan siis

$$y_h[n] = A \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

E.Y. Tutkitaan tilanne, jossa  $n > 0$ .

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], \text{ sij. yrite } y = Bx[n] = B \left(\frac{1}{3}\right)^n \implies B \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}B \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \implies B - \frac{3}{2}B = 1 \implies B = -2.$$

Täydellisen yhtälön ratkaisu on siis muotoa

$$y[n] = A \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Kyse on kausaalisesta systeemistä, sillä mitään arvoja ei pyritä ennustamaan tulevaisuuden perusteella. Tästä syystä ovat vasteen  $y[n]$  arvot  $=0$  kun  $n < 0$ , sillä tuolloin syöte  $x[n] = 0$ . Tämän alkuehdon perusteella saadaan

$$y[0] - \frac{1}{2}y[-1] = x[0],$$

jossa  $y[-1] = 0$ . Sijoitetaan tähän täydellisen yhtälön ratkaisu:

$$A \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \implies A = 3,$$

joten täydelliseksi ratkaisuksi saadaan:

$$y[n] = \begin{cases} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Tehtävän voi ratkaista myös (1) z-muuntamalla  $x[n]$  ja  $y[n]$ , hakemalla osittaismurtokkehitelmän avulla kertoimet ja muuntamalla takaisin aikatasoon tai (2) konvoluutiolla  $x[n] * h[n]$ . **HUOM!** Numeeriset ratkaisut ovat aina vain numeerisia, mutta niillä pääsee alkuun:

n	x[n]	1/2 y[n-1]	y[n] = x[n] + 1/2 y[n-1]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	1/3	1/2	5/6
2	1/9	5/12	19/36
3	1/27	19/72	65/216
..	..	..	..

21. LTI-järjestelmä muuttaa vain syötteen amplitudia - ei taajuutta, katso kappale 3.2, s. 182:

$$e^{j\omega n} \rightarrow H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

Täten  $S_1$  ei voi olla LTI, mutta  $S_2$  voi olla.

22. Synteesiyhtälö on:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Nyt kertoimet  $a_k$  ovat:



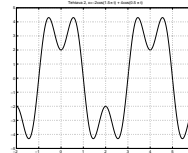
Kun perusjakson pituus on  $T = 4$  niin  $f_0 = 1/4$  ja jolloin  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 0.5\pi$ . Saadaan kuvan 30 mukainen signaali käyttämällä kertoimia  $a_{-1} = a_1 = 2, a_{-3} = a_3 = -1$  ja  $a_k = 0$  muilla  $k$ :n arvoilla:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= \dots + a_{-2} e^{j(-2)\omega_0 t} + a_{-1} e^{j(-1)\omega_0 t} + a_0 e^{j(0)\omega_0 t} + a_1 e^{j(1)\omega_0 t} + \dots \\ &= -1e^{j(-3)(0.5\pi)t} + 2e^{j(-1)(0.5\pi)t} + 2e^{j(1)(0.5\pi)t} - 1e^{j(3)(0.5\pi)t} \\ &= -(e^{-j(1.5\pi)t} + e^{j(1.5\pi)t}) + 2(e^{j(-0.5\pi)t} + e^{j(0.5\pi)t}) \\ &= -2 \cos(1.5\pi t) + 4 \cos(0.5\pi t) \end{aligned}$$

23. Vastaukset voidaan nähdä suoraan sarjaesityksestä (synteesiyhtälöstä!)

a)  $x(t) = \dots + a_{-1}e^{j(-1)\omega_0 t} + \dots = e^{-j\omega_0 t}$ , josta  $a_{-1} = 1$  ja kaikille muille  $k$ :n arvoille  $a_k = 0$ . Huomaa, että signaali on kompleksinen, jolloin Fourier-kertoimet eivät ole symmetrisesti y-akselin ympäri. Voidaan laskea myös analyysiyhtälön

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



Kuva 30: Vastaus 22:  $x(t)$  koostuu kahdesta kosinista (eli neljästä Fourier-kertoimesta).

avulla. Tällöin esimerkiksi kerroin  $a_{-1}$

$$a_{-1} = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j(-1)\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T 1 dt = 1$$

Muilla  $k$ :n arvoilla integraandiin tulee eksponenttitermin argumenttiin  $2\pi n$  moniker-ta, jolloin integraalista yli yhden jaksonpituuden tulee nolla.

b) Nyt pitää ensin selvittää peruskulmataajuus. Ensimmäisen summattavan jakso on  $T_1 = 1$  ja toisen  $T_2 = 2/3$ . Näin ollen summasignaalin perusjakso on  $T_0 = 2$  ( $T_0 = 2T_1 = 3T_2$ ) ja  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi/2 = \pi$ . Käyttäen Eulerin kaavaa lasketaan eksponenttiositys kosineille käyttäen peruskulmataajuutta  $\omega_0 = \pi$ :

$$\cos(2\pi t) = \cos((2)(\pi)t) = 0.5 (e^{j(2)(\pi)t} + e^{j(-2)(\pi)t})$$

ja  $\cos(3\pi t)$ :llä samoin,

$$\cos(3\pi t) = \cos((3)(\pi)t) = 0.5 (e^{j(3)(\pi)t} + e^{j(-3)(\pi)t})$$

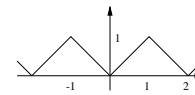
joiden avulla

$$x(t) = a_{-3}e^{j(-3)(\pi)t} + a_{-2}e^{j(-2)(\pi)t} + a_2e^{j(2)(\pi)t} + a_3e^{j(3)(\pi)t}$$

josta kertoimet

$$a_{-3} = a_3 = 1/2, a_{-2} = a_2 = 1/2, \text{ muulloin } a_k = 0.$$

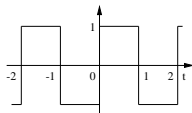
24. Jaksollinen signaali  $x(t)$



Kuva 31: Alkuperäinen signaali  $x(t)$ , kertoimet  $a_k$

a)  $a_0$  antaa signaalin keskiarvon, DC-komponentin.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = 1/2 \int_0^2 x(t) dt = \frac{1}{2}$$



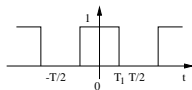
Kuva 32: Signaalin  $x(t)$  derivaatta

b) Signaalin derivaatta on

$$dx(t)/dt = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Kirjassa on johdettu kertoimet suorakaidepulsille (Example 3.5) ja vastaavalla tavalla siirretty ja skaalattule (Example 3.6) suorakaidepulsille. Sivulla 194 (kaava 3.44),  $T_1$  on kohta, jolloin askel putoaa nolnaan ja  $T$  on jaksonpituus, katso kuva alla. Tällöin kertoimet:

$$d_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, k \neq 0$$



Kuva 33: Signaali, jonka Fourier-kertoimet  $d_k$  tunnetaan

Taulukosta 3.1 nähdään, että kun signaalia, jonka Fourier-kertoimet ovat  $a_k$ , viivästetään aikatasossa  $t_0$ , niin siirretyn signaalin Fourier-kertoimet ovat  $a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$ .

Tässä tehtävässä (derivaatan) signaalin keskiarvo on nolla eli  $b_0 = 0$ . Signaalin amplitudi on kaksi ja  $T_1 = 0.5, T = 2$ , josta  $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ . Jaksonpituuden skaalaaminen ei vaikuta kertoiimiin, mikäli Fourier-sarjan perustajuuus skaalataan samalla tekijällä. Signaalia on viivästetty  $t_0 = 0.5$ .

Näin saadaan ( $d_k$  on kaavasta 3.44 saatu, yllä näkyvä tulos (kaavassa 3.44 merkitty  $a_k$ ),  $c_k$  on kahdella kerrottu suorakaidepulsisi,  $b_k$  tämä siirrettynä, jolloin saadaan tehtävässä kysytty (derivaatan) funktio),

$$\begin{aligned} c_k &= 2d_k = 2 \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \\ &= 2 \frac{2 \sin(k\pi/2)}{2k\pi} \\ &= 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \\ b_k &= c_k e^{-jk\omega_0 t_0} \\ &= c_k e^{-jk\pi/2} \\ &= 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} \end{aligned}$$

c) Derivoitomuomaisuus Fourier-kertoimille tarkoittaa, että jos signaalin  $x(t)$  Fourier-kertoimet ovat  $a_k$ , niin derivaatan  $dx(t)/dt$  Fourier-kertoimet ovat  $jk\omega_0 a_k$ .

Olkkoon nyt tässä tehtävässä alkuperäisen signaalin kertoimet  $a_k$ , jolloin  $a_k jk\omega_0$  antaa kohdassa b ratkaistut  $b_k$ :t. Koska  $T = 2$ , niin  $\omega_0 = \pi$ .

$$\begin{aligned} a_k jk\omega_0 &= \frac{2 \sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} = b_k \\ a_k &= \frac{1}{jk\omega_0} 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} \\ &= \frac{-j}{k\pi} 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} \\ &= (-j) 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2} \\ &= (-j) 2 \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{1}{2j} (e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2}) e^{-jk\pi/2} \\ &= -\frac{1}{(k\pi)^2} (1 - e^{-jk\pi}) \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{(k\pi)^2} & k \text{ pariton} \\ 0 & k \text{ parillinen} \end{cases} \end{aligned}$$

Kerätään tulokset c-kohdasta, eli kertoimet alkuperäiselle signaalille:

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2}{(k\pi)^2}, & k \text{ pariton} \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \wedge k \text{ parillinen} \end{cases}$$

Kertoimet olisi voitu toki ratkaista suoraan laskemalla.

25. \*Koska  $x(t)$ :n perusjakso on  $T = 6$ , niin kirjoitetaan Fourier-sarja

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\pi/3}$$

Signaalin reaaliarvoisuudesta seuraa, että  $|a_k| = |a_{-k}|$ . Koska  $a_k = 0$ , kun  $k = 0, 3, 4, 5, \dots$ , niin silloin  $a_k \neq 0$ , kun  $k = -2, -1, 1, 2$ . Silloin

$$x(t) = a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3} + a_1 e^{j\pi/3} + a_1^* e^{-j\pi/3}$$

Koska  $a_1 > 0$  ja reaalinen, niin

$$x(t) = a_1 2 \cos(t\pi/3) + a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3}$$

Yhtälöstä  $x(t) = -x(t-3)$  seuraa, että

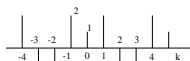
$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 2 \cos(t\pi/3) + a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3} \\ &= -a_1 2 \cos((t-3)\pi/3) - a_2 e^{j(t-3)2\pi/3} - a_2^* e^{-j(t-3)2\pi/3} \\ &= -a_1 2 \cos((t-3)\pi/3) - e^{-j2\pi} (a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3}) \\ &= -a_1 2 \cos(t\pi/3 - \pi) - a_2 e^{j2\pi/3} - a_2^* e^{-j2\pi/3} \\ &= a_1 2 \cos(t\pi/3) - a_2 e^{j2\pi/3} - a_2^* e^{-j2\pi/3} \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että  $a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3} = 0$  eli  $a_2 = 0$ . Saadaan  $x(t) = a_1 2 \cos(t\pi/3) = A \cos(Bt+C)$ . Vakiot ovat  $A = a_1 2, B = \pi/3, C = 0$ . Ominaisuus  $v$ ) kertoo, että  $\sum |a_k|^2 = 1/2$  eli  $2a_1^2 = 1/2$ . Tästä saadaan  $a_1 = 1/2$  eli  $A = 1$ . Lopulta on osoitettu, että  $x(t) = \cos(t\pi/3)$ .

26. Synteesiyhtälö on

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e^{jk\omega n}$$

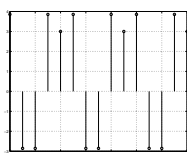
Nyt kertoimet  $a_k$  ovat:



Huomaa erityisesti, että **diskreetin signaalin Fourier-kertoimet ovat jaksollisia**, toisin sanoen esimerkiksi  $a_0 = a_5 = a_{-5} = a_{10} = a_{-10} = \dots$ . Merkitään näissä vastauksissa yllä mainittuja kertoimia merkinnällä  $k = \langle 0 \rangle$  eli toisin sanoen  $k = 5m$ , jossa  $m \in \mathbb{Z}$  ja 5 tulee jaksonpituudesta.

Kun perusjakson pituus on  $N = 5$ , jolloin  $\omega_0 = 2\pi/N = 0.4\pi$ . Saadaan:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-2}^2 a_k e^{jk\omega n} \\ &= -1e^{j(-2)(0.4\pi)n} + 2e^{j(-1)(0.4\pi)n} + 1e^0 + 2e^{j(1)(0.4\pi)n} - 1e^{j(2)(0.4\pi)n} \\ &= -(e^{-j(0.8\pi)n} + e^{j(0.8\pi)n}) + 1 + 2(e^{-j(0.4\pi)n} + e^{j(0.4\pi)n}) \\ &= -2 \cos(0.8\pi n) + 4 \cos(0.4\pi n) + 1 \end{aligned}$$



Kuva 34: Tehtävä 26:  $-2 \cos(0.8\pi n) + 4 \cos(0.4\pi n) + 1$

27. Edelleen pyydettiin analyysiyhtälöllä, vaikka käsin laskettaessa lyhyitä muunnoksia päätely synteesiyhtälön kautta on ehkä näppärämpää. a-kohta lasketaan sekä synteesi- että analyysiyhtälöä käyttäen.

a) Peruskulmataajuus  $\omega_0 = \pi/3$  ja jakson pituus  $N = 6$ . Kertoimet voidaan päätellä synteesiyhtälön kehittämistä, ja saadaan

$$x_1[n] = \dots + a_{-1} e^{j(-1)(\pi/3)n} + a_0 + a_1 e^{j(1)(\pi/3)n} + \dots$$

josta  $a_{-1} = a_1 = 1/2$ , ja muut  $a_k = 0$ , kun  $k = \langle -2, 0, 2, 3 \rangle$ .

Jos halutaan käyttää analyysiyhtälöä, muokataan kosini Eulerin avulla eksponentti-muotoon ja lasketaan:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{6} \sum_{n=(0,1,2,3,4,5)} x[n] e^{-jk\omega n} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=(0,1,2,3,4,5)} (0.5e^{j(-1)(\pi/3)n} + 0.5e^{j(1)(\pi/3)n}) e^{-jk(\pi/3)n} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=(0,1,2,3,4,5)} (0.5e^{j(-1)(\pi/3)n} e^{-jk(\pi/3)n}) + (0.5e^{j(1)(\pi/3)n} e^{-jk(\pi/3)n}) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=(0,1,2,3,4,5)} 0.5e^{-j(\pi/3)n(1+k)} + 0.5e^{j(\pi/3)n(1-k)} \\ &= \begin{cases} 0.5, & \text{kun } k = \pm 1, \pm 6, \dots \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Ensimmäisen summattavan jaksonpituus on  $N_1 = 4$  ja toisella  $N_2 = 8$ . Tällöin perusjako  $N = 8$  ja peruskulmataajuus  $\omega_0 = \pi/4$ . Saadaan siis

$$x[n] = \dots + a_{-2} e^{j(-2)(\pi/4)n} + a_{-1} e^{j(-1)(\pi/4)n} + a_0 + a_1 e^{j(1)(\pi/4)n} + a_2 e^{j(2)(\pi/4)n} + \dots$$

josta  $a_{-2} = \frac{-1}{2j}, a_{-1} = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2j}$ , ja muut  $a_k = 0$ , kun  $k = \langle -3, 0, 3, 4 \rangle$ .

28. Fourier-muunnos, sinc-funktio. Kirjan esimerkit 4.4 ja 4.5.

a) Laske Fourier-muunnos signaalille

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} = X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T_1}^{T_1} 1 e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \\ &= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega T_1} - e^{-j\omega(-T_1)}) \\ &= \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_1), \omega \neq 0 \end{aligned}$$

Kun  $\omega = 0$  eli halutaan ns. DC-komponentti, voidaan ylläoleva vielä muuttaa muotoon

$$X(j\omega) = \frac{2T_1 \sin(\omega T_1)}{\omega T_1}$$

joka lähenee  $2T_1$ :ä, kun  $\omega \rightarrow 0$ , koska tiedetään, että  $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$ , kun  $x \rightarrow 0$ .

b) Esitä a-kohdassa saatu F-muunnos sinc-funktion avulla,  $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_1) &= \frac{2}{\omega} \left( \frac{\sin(\frac{\omega T_1}{\omega T_1})}{\frac{\omega T_1}{\omega T_1}} \right) \\ &= \frac{2}{\omega} \left( \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \right) (\omega T_1) \\ &= 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) \end{aligned}$$

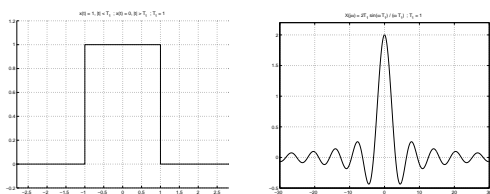
29. F-muunna seuraavat signaalit ja impulssivaste käyttäen hyväksi taulukkoa (aikasiirto, lineaarisuus, derivointi ajassa) ja aiempia tuloksia (tehtävä 28).

a)  $x_1(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

Kyseessä on tehtävän 28 signaali, jota on viivästetty yhdellä (sekunnilla) ja kerrottu kahdella (piirrä!). Lisäksi  $T_1 = 1$ . Taulukosta nähdään ajassa siirtäminen: jos  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , niin  $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$ .

$$\begin{aligned} X_1(j\omega) &= 2 e^{-j\omega 1} X(j\omega) = 2 e^{-j\omega} \left( 2 \cdot 1 \text{sinc}\left(\frac{\omega 1}{\pi}\right) \right) \\ &= 4 e^{-j\omega} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \end{aligned}$$

b)  $x_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 4 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$



Kuva 35: Suorakulmafunktion  $x(t)$  Fourier-muunnos on sinc-funktio

Tässä voidaan käyttää hyväksi lineaarisuutta eli ajatella signaalin  $x(t)$  muodostuvan (vaikkapa) kolmen osignaalin summana. Ensimmäinen ( $X_{2a}$ ) on yhden korkea suorakaide välillä 0..1, toinen ( $X_{2b}$ ) kolmen korkea välillä 1..2 ja kolmas ( $X_{2c}$ ) kahden korkea välillä 2..4. Käytetään edelleen tehtävän 28 tulosta  $X(j\omega) = 2T_1 \text{sinc}(\frac{\omega T_1}{\pi})$ .

$$\begin{aligned} X_2(j\omega) &= X_{2a}(j\omega) + X_{2b}(j\omega) + X_{2c}(j\omega) \\ &= e^{-j\omega 0.5} \left( \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \right) + 3 e^{-j\omega 1.5} \left( \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \right) + 4 e^{-j\omega 3} \left( \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right) \end{aligned}$$

c)  $h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$

Nyt nähdään, että kyseessä on ajassa siirto  $t_0 = 2$  ja taulukosta nähdään muunnospari  $e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$ , jossa  $a = 1$ . Näin **impulssivasteesta**  $h(t)$  saadaan **taajuusvaste**  $H(j\omega)$

$$H_3(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \frac{1}{a+j\omega} = e^{-2j\omega} \frac{1}{1+j\omega}$$

d)  $x_4(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

Aiemmin tehtävässä 24 kolmioaalto oli jaksollinen (nyt ei-jaksollinen). Nytkin käytetään hyväksi derivointiominaisuutta. Nähdään (piirrä!), että

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

Nämä ovat kaksi suorakaideita (aikaistettu  $X_{4a}$  ja viivästetty sekä negatoitu  $X_{4b}$ ):

$$\begin{aligned} X_4(j\omega) &= e^{-j\omega(-0.5)} (2 \cdot 0.5 \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right)) - e^{-j\omega(0.5)} (2 \cdot 0.5 \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right)) \\ &= \left( \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \right) (2j \sin(0.5\omega)) \end{aligned}$$

Taulukosta nähdään, että  $\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$ . Nyt siis  $x_4(t) = \frac{dx_4(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X_4(j\omega) = X_4'(j\omega)$ .  $X_4'(j\omega)$  tunnetaan, joten saadaan

$$\begin{aligned} X_4(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} X_4'(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \left( \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \right) (2j \sin(0.5\omega)) \\ &= \frac{2}{\omega} \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \sin(0.5\omega) \\ &= \left( \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \right)^2 \end{aligned}$$

DC-komponentti saadaan lasketuksi:  $|X_4(0)| = 1$ , joka on kolmion  $x_4(t)$  pinta-ala.

30. Konvoluutio-ominaisuus (s. 314)

$$y(t) = h(t) * x(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

Laske impulssivasteiden  $h_1(t) = e^{-0.5t}u(t)$  ja  $h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$  konvoluutio  $h_1(t) * h_2(t)$  käyttämällä F-muunnoksen konvoluutio-ominaisuutta (muunnosten kertolasku, osamurtokehitelmällä tulo summatermeiksi, käänteismuunnos takaisin aikatasoon).

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{0.5 + j\omega}$$

$$H_2(j\omega) = 2 \cdot \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega) = \left(\frac{1}{0.5 + j\omega}\right) \left(\frac{2}{1 + j\omega}\right)$$

Halutaan  $H(j\omega)$  kahden ensimmäisen asteen rationaalipolynomin summaksi. Käytetään osamurtokehitelmää hajottamalla kertolasku summaksi. (Kertaa osamurtokehitelmä (partial fraction expansion) matematiikasta tai Appendix A, jos ei ole tuttu!)

$$\frac{A}{0.5 + j\omega} + \frac{B}{1 + j\omega} = \frac{A + Aj\omega + 0.5B + Bj\omega}{(0.5 + j\omega)(1 + j\omega)}$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A + 0.5B = 2 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

Näistä saadaan  $A = 4, B = -4$ , joten taajuusvaste  $H(j\omega)$  ja sen käänteismuunnos (taulukosta!) impulssivaste  $h(t)$  ovat

$$H(j\omega) = \frac{4}{0.5 + j\omega} - \frac{4}{1 + j\omega}$$

$$h(t) = 4e^{-0.5t}u(t) - 4e^{-t}u(t)$$

Tätä ominaisuutta  $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$  käytetään runsaasti!

31. Käänteinen F-muunnos

a) Laske käänteinen Fourier-muunnos

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Laske vastaavasti kuin tehtävässä 28. Tulos:  $x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi}$

b) Esitä a-kohdassa saatu signaali sinc-funktion avulla,  $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}$ . Laske vastaavasti kuin tehtävässä 28. Tulos:  $\frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$

c) Duaalioinaisuus tarkoittaa, että suorakulmafunktio muuttuu muunnoksessa sinc-funktioksi ja päinvastoin. Tätä on selvitetty kirjassa sivulla 309-310 ja luentokalvoissa.

32. \*Lisää laskentaa

a) Laske  $h(t) = e^t u(-t)$  ja  $x(t) = e^{-t} u(t)$  konvoluutio  $y(t) = h(t) * x(t)$  käyttämällä konvoluutio-ominaisuutta.

$X(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega}$  ja  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ . Jälkimmäinen muunnos seuraa, koska  $h(t) = x(-t)$ . Kirjoitetaan  $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$  osamurtoina:

$$Y(j\omega) = \frac{A}{1 + j\omega} + \frac{B}{1 - j\omega} = \frac{1}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)}$$

Lasketaan A kuten yllä tai kertomalla yhtälö A:n nimittäjällä ja sijoittamalla A:n nolllakohta.

$$(1 + j\omega) \frac{A}{1 + j\omega} + \frac{B}{1 - j\omega} = (1 + j\omega) \frac{1}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)}$$

$$A + \frac{B(1 + j\omega)}{1 - j\omega} = \frac{1}{1 - j\omega}, \text{ sij. } j\omega = -1 \implies$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Samoin saadaan B:

$$(1 - j\omega)Y = \frac{1}{(1 + j\omega)}, \text{ sij. } j\omega = 1 \implies$$

$$B = \frac{1}{2}$$

Siis  $Y(j\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega} \right)$ . Silloin

$$y(t) = \frac{1}{2}(x(t) + h(t)) = \frac{1}{2}(e^{-t}u(t) + e^t u(-t)) = \begin{cases} 0.5e^{-t}, & t > 0 \\ 0.5e^t, & t < 0 \end{cases}$$

b) Laske  $R(j\omega)$ , kun  $r(t) = e^{-|t|} \cos(2t)$ .  $R_1$  integroimalla,  $R_2$  taulukosta, näiden konvoluutio.

Kyseessä on selvästikin kahden funktion tulo, jolloin vastaavan Fourier-muunnoksen saa konvoluution avulla. Merkitään tulosta  $X(j\omega) = X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$  :lla. Lasketaan ensin

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt$$

$$= \frac{1}{1-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{1+j\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega}$$

$$= \frac{2}{1+\omega^2}$$

ja sitten sivun 329 taulukosta

$$X_2(j\omega) = \pi[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)].$$

Lasketaan nyt konvoluutio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+\omega^2} \pi[\delta(\omega - \tau - 2) + \delta(\omega - \tau + 2)] d\omega = \frac{2\pi}{1 + (\tau + 2)^2} + \frac{2\pi}{1 + (\tau - 2)^2},$$

eli  $\omega$ :n avulla

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{1 + (\omega + 2)^2} + \frac{2\pi}{1 + (\omega - 2)^2}$$

33. Laske seuraavien signaalien Fourier-muunnokset:

a)  $x[n] = \delta[n - 1] + \delta[n + 1]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta[n - 1] + \delta[n + 1]) e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega} + e^{j\omega} = 2 \cos \omega$$

b)  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n - 1]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n - 1] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} e^{-j\omega n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} e^{-j\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

Geometrisen sarjan summalla "muljautuksen" voi ajatella vaikka muuttujanvaihtona  $n = m + 1$ .

34. Diskreettiaikainen Fourier-muunnos on aina  $2\pi$ -jaksollinen:

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1}$$

a)  $|X(e^{j(\pi/4)})| = 5$       b)  $\angle X(e^{j(\pi/4)}) = \arctan(4/3) \approx 0.927$

c)  $X(e^{j(-\pi/4)}) = 3 - 4j$       d)  $X(e^{j(\pi/4+2\pi)}) = 3 + 4j$

e) Jos  $f_s = 4000$  Hz, niin  $f_c = \frac{4000 \text{ Hz} \cdot (\pi/4)}{2\pi} = 500$  Hz

35. Jaksolliselle signaalille voidaan muodostaa Fourier-sarjan. Sille voidaan laskea myös Fourier-muunnos (s. 367-372, Example 5.5). Muistetaan myös, että  $\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$ .

$$x[n] = \sin((\pi/6)n + \pi/4)$$

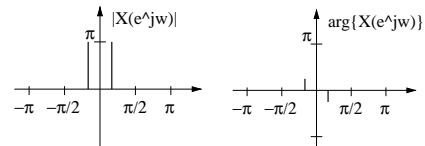
$$= \cos((\pi/6)n - \pi/4)$$

$$= 0.5(e^{j((\pi/6)n - \pi/4)} + e^{-j((\pi/6)n - \pi/4)})$$

$$= 0.5(e^{j(\pi/6)n} e^{j(-\pi/4)} + e^{-j(\pi/6)n} e^{-j(-\pi/4)})$$

$$= (0.5e^{-j\pi/4}) e^{j(\pi/6)n} + (0.5e^{j\pi/4}) e^{-j\pi/6n}$$

Jokaista eksponentiaalista signaalia  $x[n] = e^{j\omega n}$  vastaa yksi piikki taajuustasossa taajuudella  $\omega = \omega_0$ , ja  $2\pi$ -jaksollisuus huomioon ottaen:  $X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$ . Koska sini/kosini voidaan esittää kahdella eksponenttifunktiolla, tulee taajuustasoon siis kaksi piikkiä per  $2\pi$ -jakso. Amplitudispektriin tulee kyseisen kompleksisen kertoimen (tässä  $\omega = \pi/6$ :  $0.5e^{-j\pi/4}$  ja  $\omega = -\pi/6$ :  $0.5e^{j\pi/4}$ ) itseisarvo  $(2\pi \cdot 0.5 = \pi)$  ja vaihespektriin kompleksisen kertoimen kulma ( $\omega = \pi/6$ :  $-\pi/4$ ,  $\omega = -\pi/6$ :  $\pi/4$ ).



36. Päättyä Fourier-määritelmästä tai -taulukoista.

a) Tarkastelemalla diskreetin Fourier-muunnoksen laskukaavaa saadaan

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j \cdot 0 \cdot n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 6.$$

b) Tarkastelemalla signaalia havaitaan, että sen aikasiirto  $x[n+2]$  tuottaa reaalisen, parillisen signaalin  $r[n]$ , jonka Fourier-muunnos on tunnetusti myöskin reaalinen ja parillinen ( $\arg R(e^{j\omega}) = 0$ ). Sama toimii myös käänteisesti, eli mikäli luodaan ylläoleva reaalinen parillinen signaali ja viivästetään sitä kahdella  $r[n-2]$ , saadaan tarkasteltua signaali  $x[n]$ . Taajuustasossa tämä tarkoittaa sitä, että tarkasteltavan signaalin taajuusvaste saadaan reaalisen signaalin Fourier-muunnoksen  $R(e^{j\omega})$  ja aikasiirron  $e^{-j\omega n_0}$  avulla

$$X(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega} R(e^{j\omega}),$$

missä  $R(e^{j\omega})$ :n kerroin tulee juuri aikasiirrosta ( $n_0 = 2$ ). Ylläoleva  $X(e^{j\omega})$ :n yhtälö on nyt muotoa  $X(e^{j\omega}) = e^{j \arg X(e^{j\omega})} |X(e^{j\omega})|$ , joten kulmaksi saadaan suoraan  $\arg X(e^{j\omega}) = -2\omega$ .

Kulma voidaan myös laskea seuraavasti:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega} R(e^{j\omega}) = (\cos 2\omega - j \sin 2\omega) R(e^{j\omega}),$$

$$\arg X(e^{j\omega}) = \arctan \left[ \frac{-R(e^{j\omega}) \sin 2\omega}{R(e^{j\omega}) \cos 2\omega} \right] = -2\omega.$$

c) Tarkastelemalla käänteisen Fourier-muunnoksen kaavaa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

havaitaan, että

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi x[0] \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 4\pi,$$

kun  $x[0] = 2$ .

d) Diskreetin Fourier-muunnoksen kaavasta

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}.$$

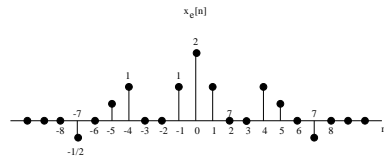
Kun  $n$  on parillinen, on  $e^{-j\pi n} = 1$  ja kun  $n$  on pariton, on  $e^{-j\pi n} = -1$ . Näin saadaan

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-1)^n = 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 + 1 = 2.$$

e) Taulukosta (s. 391) nähdään, että

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} \leftrightarrow x_e[n] = \frac{1}{2}\{x[-n] + x[n]\}.$$

Näin ollen signaalista tulee kuvassa 36 esitetyn mallinen.



Kuva 36: Parillinen signaali  $x_e[n]$ .

f) Parsevalin relaatiosta saadaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2,$$

eli

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \cdot (1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1) = 28\pi.$$

Taajuusalueen derivaatalle pätee

$$j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) \leftrightarrow nx[n].$$

Parsevalin relaation avulla voidaan nyt kirjoittaa

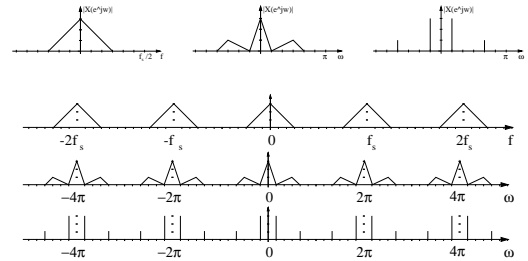
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |-jn x[n]|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |x[n]|^2.$$

Ja tulokseksi saadaankin

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi(9 + 1 + 1 + 9 + 64 + 25 + 49) = 316\pi.$$

37. Reaalisella signaalilla on  $y$ -akselin suhteen symmetrinen amplitudispektri: Ne ovat aina  $2\pi$ -jaksollisia, esimerkiksi välillä  $-\pi.. \pi$  tai  $0..2\pi$  ja niiden  $2\pi$ -monikertoina (Katso tehtävä 34). Jos taajuuksiin liitetään fyysinen arvo vähähdystä sekunissa ( $f_s$ , Hz), niin näiden suhde on

$$\frac{f_c}{f_s} = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{f_{norm}}{2}$$



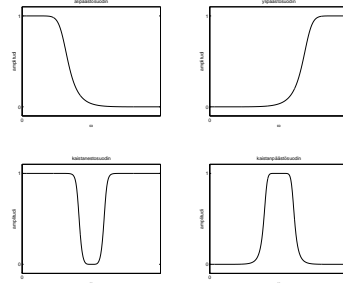
Kuva 37: Diskreetti-aikaisen sekvenssin spektrit ovat  $2\pi$ -jaksollisia

38. Kuvan 12 vasemmassa sarakkeessa ylhäällä on kohinaa. Valkoisen kohinan spektri on vakio. Nyt meillä on vain pieni näyte kohinaa, joten sen spektrin oikealla alhaalla näytetään sotkuiselta. Siistimpi spektri saataisiin laskemalla F-muunnos pienemmissä ikkunoissa (pienempi taajuuden erottelukyky). Jos kohinanäytteitä otettaisiin paljon ja niiden osapektreistä laskettaisiin keskiarvo, päästäisiin myös lähemmäs vakiota.

Vasemmalla keskellä on jaksollinen signaali, joka on puheäänteestä "o". Perusjakson aika on kuvasta vajaa 0,01 sekuntia, mikä vastaa noin yli 100 Hertzin komponenttia. Sitten signaalista löytyy useita nopeampijaksoisia komponentteja. Taajuustason kuvaaja on siis yllimpänä.

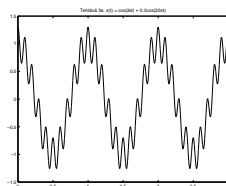
Vasemmalla alhaalla on nauhoituksen sähköjohdosta indusoidut verkkojännitehäiriöt, jaksotaajuus 0,02 sekuntia. Se näkyy suurena piikkinä oikean sarakkeen keskimmissä kuvassa kohdassa 50 Hz.

39. Suodintyypeissä alipäästö päästä läpi signaalin matalat taajuudet, jne. Amplitudivasteesta voidaan erottaa **päästökaista**, **transiitokaista** ja **estokaista** tiettyjen **rajataajuuksien** kohdalla.



40. Signaalin suodattaminen ali- ja ylipäästösuotimella

a) Signaali  $x(t)$  aikatasossa:



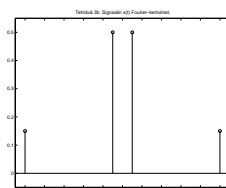
b) Selvitetään ensin peruskulmataajuus. Ensimmäisen summattavan  $T_1 = 1$  ja toiselle  $T_2 = 0.1$ . Näin ollen summasignaaleille  $T_0 = 1$  ja  $\omega_0 = 2\pi$ .

Lasketaan eksponenttiositus kosineille käyttäen peruskulmataajuutta  $\omega_0 = 2\pi$ :

$$x(t) = a_{-10}e^{j(-10)(2\pi)t} + a_{-1}e^{j(-1)(2\pi)t} + a_1e^{j(2\pi)t} + a_{10}e^{j(10)(2\pi)t}$$

josta saadaan kertoimet

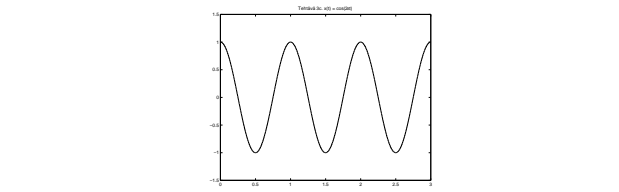
$$a_{-1} = a_1 = 0.5, \quad a_{-10} = a_{10} = 0.15, \quad \text{muulloin } a_k = 0$$



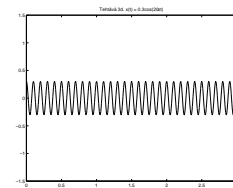
c) Ideaalinen alipäästösuodin rajataajuudella  $\omega_c$ :

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Koska suodatus (konvoluutio  $y(t) = h(t) * x(t)$ ) tarkoittaa taajuustasossa muunnosten kertolaskua  $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ , niin Fourier-kertoimet  $a_{-1}$  ja  $a_1$  kerrotaan ykkösellä ja  $a_{-10}$  ja  $a_{10}$  kerrotaan nolllalla. Jäljelle jää siis aikatasossa matalataajuuksinen sini.



d) Ideaalisella ylipäästösuotimella jää suodatuksen jälkeen korkeampi komponentti jäljelle. LTI-järjestelmät toteuttavat siis **taajuusselektiivistä** suodatusta.



41. Konvoluutio-ominaisuus (s. 382)

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \leftrightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Idea on siis se, että pyritään välttämään aikatason konvoluution laskeminen, mikä voi olla usein varsin ongelmallista. Tämä saavutetaan Fourier-muuntamalla konvolvoitavat signaalit, kertomalla muunnokset keskenään ja lopuksi käänteismuuntamalla saatu tulo lopputulokseksi  $y[n]$ .

a)  $h[n] = (\delta[n-1] - \delta[n-2])$ ,  $x[n] = 0.6^n u[n]$

Tässä nähdään heti, että taajuusvaste

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}$$

jolloin

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.6e^{-j\omega}} - e^{-j2\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.6e^{-j\omega}}$$

josta saadaan sama kuin aikatason konvoluutiosta:

$$y[n] = 0.6^{n-1}u[n-1] - 0.6^{n-2}u[n-2]$$

Tässä konvoluutio-ominaisuudesta ei ole juuri hyötyä, koska konvoluution laskeminenkin on helppoa!

b)  $h[n] = 0.4^{n-1}u[n-1]$ ,  $x[n] = (-0.7)^n u[n]$

Tässä jouduttaisiin konvolvoimaan kaksi eksponenttifunktiota keskenään, mikä on hankalampaa. Muunnetaan siis osittain:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.4e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.4e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

Kuten laskarikierröksellä 5 tehtävässä 3 joudutaan nyt suorittamaan **osittaismurtokehittelmä**, jonka tarkoitus on saada  $Y(e^{j\omega})$  kahden ensimmäisen asteen rationaalifunktion summaksi:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - 0.4e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

Harjoittele osittaismurtokehittelmää! Lopputulos:

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.4e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 + 0.7e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \cdot \frac{(4/11)}{1 - 0.4e^{-j\omega}} + e^{-j\omega} \cdot \frac{(7/11)}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

Ensimmäisen asteen lohkot voidaan käänteismuuntaa suoraan taulukon avulla:

$$y[n] = h[n] * x[n] = (4/11) \cdot 0.4^{n-1}u[n-1] + (7/11) \cdot (-0.7)^{n-1}u[n-1]$$

42. Tehtävässä annettu yhtälö on  $X$ :n ja  $G$ :n jaksollinen konvoluutio (s. 388-389), joka voidaan kirjoittaa pienen muunnoksen jälkeen konvoluutiomerkinällä

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})G(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = X(e^{j\omega}) * G(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega}$$

mistä seuraa konvoluutio-ominaisuutta käyttäen, että signaalin  $y[n] = x[n] \cdot g[n]$  Fourier-muunnos on  $1 + e^{-j\omega}$ . Tällainen signaali on diskreetin Fourier-muunnostaulukon avulla

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{1 + e^{-j\omega}\} = \delta[n] + \delta[n-1] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Ratkaisua voi hakea esimerkiksi graafisesti piirtämällä  $x[n]$ , haettava  $g[n]$  ja  $y[n]$  allekain ja etsiä sopiva  $g[n]$ . Kohdassa a) saadaan  $g[n] = y[n]/x[n] = 1/(-1)^n$ ,  $n = 0, 1$  eli

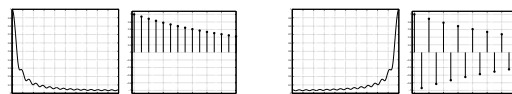
$$g[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kohdassa b) saadaan  $g[n] = y[n]/x[n] = 1/(1/2)^n$ ,  $n = 0, 1$  eli

$$g[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

43. Otetaan esimerkki tehtävän tilanteesta. Alla olevassa kuvassa kaksi vasemmanpuoleista kuvaa esittävät alipäästösuotimen taajuustason taajuusvastetta ja impulssivastetta aikatasossa. Alipäästösuodinhan keskiarvoistaa (MA, moving average), joten impulssivasteen arvot samanmerkkisiä; suotimen käytöstä voidaan pitää painotetun keskiarvon laskemisena. Amplitudivasteen x-akseli on normalisoitu välille 0..1, jossa 1 vastaa  $\pi/4$  tai puolta näytteenottotaajuutta. Koska signaali on reaallinen, voi amplitudivasteen ajatella symmetriseksi y-akselin suhteen.

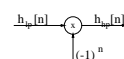
Kaksi oikeanpuoleista kuvaa esittävät tapausta, jossa joka toinen impulssivasteen arvo on asetettu vastaluvuksi eli alipäästösuotimen impulssivaste on kerrottu lukujonolla  $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ . Tästä uudesta impulssivasteesta laskettu suotimen amplitudivaste on kolmannessa kuvassa. Huomataan, että suotimesta on tullut ylipäästösuodin. Tarkastellaan nyt tilannetta matemaattisesti, joka lähtee kauniista esityksestä  $e^{j\pi} = -1$ .



Kuva 38: Esimerkki alipäästösuotimen impulssivasteen moduloimisesta jonolla  $(-1)^n$ . (a)  $|H_{lp}(e^{j\omega})|$ , (b)  $h_{lp}[n]$ , (c)  $|H_{hp}(e^{j\omega})|$ , (d)  $h_{hp}[n]$ .

a) Saatetaan impulssivaste muotoon

$$h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n] = e^{-j\pi n} h_{lp}[n]$$



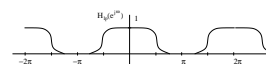
Kuva 39: Modulointi lukujonolla  $(-1)^n$ .

Fourier-muunnokseksi tulee nyt

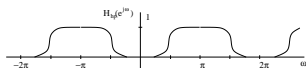
$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{hp}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi n} h_{lp}[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{lp}[n]e^{-j(\omega+\pi)n} = H_{lp}(e^{j(\omega+\pi)})$$

eli siis taajuusvastetta siirretään  $\pi$ :n verran eteenpäin. Huomaa, että **diskreetin** Fourier-muunnoksessa taajuustaso on  $2\pi$ -jaksollinen ( $2\pi$  vastaa näytteenottotaajuutta). Jos tilanne piirretään, on alipäästösuotimen taajuusvaste



Ja näin ollen saatu  $H_{hp}$ :n taajuusvaste on  $H_{hp}$  on siis ylipäästösuotimen taajuusvaste.



b) Tehdään a) -kohta käänteisesti

$$h_{lp}[n] = (-1)^n h_{hp}[n] = e^{-j\pi n} h_{hp}[n]$$

Fourier-muunnokseksi tulee nyt

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = H_{hp}(e^{j(\omega+\pi)})$$

44. Aikatason konvoluutio vastaa taajuustasossa muunnosten kertolaskua

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

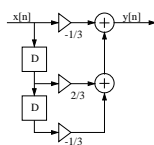
Tiedetään LTI-järjestelmästä S, että sillä on impulssifunktio

$$h[n] = \frac{1}{3}(-\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2])$$

a) Impulssivasteen pituus on äärellinen (kolme). Siten järjestelmässä ei ole takaisinkytkentää, se on BIBO-stabiili ja vastaava differenssiyhtälö voidaan kirjoittaa impulssivasteen kertoimien avulla

$$y[n] = \frac{1}{3}(-x[n] + 2x[n-1] - x[n-2])$$

Järjestelmän lohkoavaio on kuvassa 40.



Kuva 40: Lohkoavaio

b) Taajuusvaste saadaan joko muunnostauluista tai suoraan määritelmästä

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

Nyt siis  $H(e^{j\omega}) = (-1/3) + (2/3)e^{-j\omega} + (-1/3)e^{-j2\omega}$

Tästä saadaan siis kertoimiksi  $b_0 = -1/3$ ,  $b_1 = 2/3$ ,  $b_2 = -1/3$  ja jakajaan pelkkä vakio 1 eli  $a_0 = 1$  ja  $a_k = 0$ ,  $k \neq 0$ .

c) Tulos saadaan joko käyttämällä muunnoskaavoja  $h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega})$ ,  $\delta[n] \leftrightarrow 1$ ,  $\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{j\omega n_0}$  tai laskemalla Fourier-muunnosta:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^2 h[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{3}(-1 + 2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}) = e^{-j\omega} \left( -\frac{1}{3}(e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega}) \right)$$

$$= e^{-j\omega} \left( \frac{2(1 - \cos(\omega))}{3} \right)$$

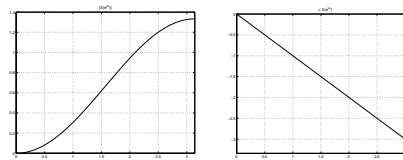
Tällöin

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{2(1 - \cos(\omega))}{3} \right|$$

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} = -\omega$$

Matlabissa:

```
wman = [0: pi/256 : pi];
b0 = -1/3; b1 = 2/3; b2 = -1/3;
HFman = b0 + b1*exp(-j*wman) + b2*exp(-j2*wman);
plot(wman, abs(HFman)); % amplitudivaste, lin. asteikko
plot(wman, 20*log10(abs(HFman))); % amplitudivaste, log. asteikko
plot(wman, angle(HFman)); % vaihevaste
```



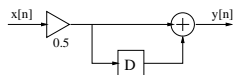
Kuva 41: Ylipäästösuotimen amplitudivaste ja vaihevaste

Amplitudivaste  $|H(e^{j\omega})|$  (Kuva 41) saa arvon nolla taajuudella  $\omega = 0$  ja maksimiarvon 1 taajuudella  $\omega = \pi$  kasvaen monotonisesti. Kyseessä on siis ylipäästösuodin, joka siis vahvistaa signaalin muutoksia ja vaimentaa vakiosignaalia.

Kyseen systemi on kausaalinen ja stabiili, koska se on tyypiltään FIR (äärellisen pitkä impulssivaste): rajoitettu syöte tuottaa aina rajoitetun vasteen. (Toinen tyyppi oli siis IIR, äärettömän pitkä impulssivaste, joka voi olla epästabiili, jos takaisinkytkentä vahvistaa liikaa.)

45. Olkoon annettuna taajuusvaste  $H(e^{j\omega}) = 0.5 \cdot (1 + e^{-j\omega})$ . Taajuusvaste voidaan hajottaa amplitudi- ja vaihevasteeseen  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg\{H(e^{j\omega})\}}$ .

Taajuusvasteen "hahmottelussa" kannattaa tehdä taulukko, johon laskee  $H(e^{j\omega})$ :n arvoja joillakin "tärkeillä" taajuusarvoilla, kuten  $\omega = \{0, \dots, \pi/2, \pi\}$ .



Kuva 42:  $y[n] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$

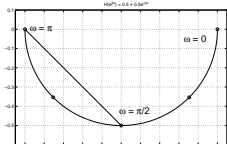
- a) Saadaan  $h[n] = 0.5\delta[n] + 0.5\delta[n-1]$  eli differenssiyhtälönä  $y[n] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$ . Kyseessä siis FIR-tyyppinen suodin, eli ei takaisinkytkentöjä, katso kuva 42.
- b) Kun syötteenä on yksikköaskel  $u[n]$ , ulostulona on askelvaste  $s[n]$ , joka tässä tapauksessa on

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 0.5, & n = 0 \\ 1, & n \geq 1 \end{cases}$$

- c) Lasketaan  $H(e^{j\omega})$ :n kompleksisia arvoja, kun  $\omega = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ .  $H(e^{j\omega})$  koostuu vakiosta 1 ja eksponenttifunktiosta  $e^{j\omega}$  (ympyrä). Interpoloidaan arvioiden lausekkeen  $0.5 \cdot (1 + e^{-j\omega})$  käyttäytymistä ja saadaan kuvaaja 43.

Matlabilla sama:

```
w = [ 0 : pi/256 : pi]; w2 = [ 0 : pi/4 : pi];
H = 0.5 + 0.5*exp(-j*w); H2 = 0.5 + 0.5*exp(-j*w2); % taajuusvaste
plot(real(H), imag(H)); % piirretään kompleksitasoon
hold on; plot(real(H2), imag(H2), 'o'); % lisätään viisi palloa
```



Kuva 43:  $H(e^{j\omega})$  kompleksitasossa. Taajuus käyrän parametrina (ei x- eikä y-akseli). Origovektori osoittaa tilannetta  $\omega = \pi/2$ , jolloin  $H(e^{j\omega}) = 1 - j$  eli  $|H(e^{j\omega})| = 1/\sqrt{2}$  ja  $\arg\{H(e^{j\omega})\} = -\pi/4$ .

Taajuusvasteen amplitudi halutulla taajuudella saadaan nyt origovektorin pituutena origosta taajuuden osoittamaan paikkaan käyrällä. Taajuusvasteen vaihe halutulla taajuudella saadaan origovektorin ja x-akselin kulmana.

- d) Lasketaan amplitudivastetta  $|H(e^{j\omega})|$  kuten tehtävässä 5. Jos laskimesi ei tue kompleksiarvoista eksponenttifunktiota, niin hajota Eulerin kaavaa  $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$  käyttäen

$$H(e^{j\omega}) = 0.5 \cdot (1 + \cos(\omega) - j \sin(\omega))$$

Hahmoteltua varten lasketaan viisi eri pistettä.

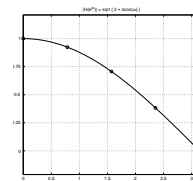
$\omega$	$ H(e^{j\omega}) $	$\omega$	$ H(e^{j\omega}) $
0	$0.5  1 + 1 - j0  = 1$	$\pi/4$	$\approx 0.5  1 + 0.71 - 0.71j  \approx 0.92$
$\pi/2$	$0.5  1 + 0 - j  = 0.71$	$3\pi/4$	$\approx 0.5  1 - 0.71 - 0.71j  \approx 0.38$
$\pi$	$0.5  1 - 1 - j0  = 0$		

Tässä hyvin yksinkertaisessa tapauksessa voidaan kompleksiluvun itseisarvo (Kuva 44) saada hyvinkin sievässä muodossa. Yleensä tämä ei päde, vaan ornatetaan laskea muodosta, josta tekee vähiten näppäily- ja laskuvirheitä.

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= 0.5 \cdot |1 + e^{-j\omega}| = |(0.5 + 0.5 \cos(\omega)) + j(-0.5 \sin(\omega))| \\ &= \sqrt{(0.25 + 0.5 \cos(\omega) + 0.25 \cos^2(\omega)) + 0.25 \sin^2(\omega)} = \sqrt{0.5 + 0.5 \cos(\omega)} \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \sqrt{H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})} = \sqrt{H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})} \\ &= \sqrt{0.25 \cdot (1 + e^{-j\omega})(1 + e^{j\omega})} = \sqrt{0.25 \cdot (1 + e^{j\omega} + e^{-j\omega} + 1)} \\ &= \sqrt{0.5 + 0.5 \cos(\omega)} \end{aligned}$$



Kuva 44: Amplitudivaste  $|H(e^{j\omega})|$

Matlabilla amplitudivasteen arvot ja piirto:

```
[w' abs(transpose(H))] % pelkkä hipsu hermitoi
plot(w, abs(H));
```

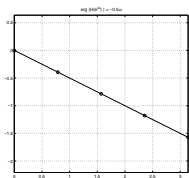
- e) Lasketaan vaihevaste  $\arg\{H(e^{j\omega})\}$  (Kuva 45) joko eksponenttifunktiosta tai käyttämällä taulukkoa (trigonometriset kulmat). Kulmaa laskettaessa vakiokerroin 0.5 ei vaikuta mitään.

$$\begin{aligned} \arg\{H(e^{j\omega})\} &= \arg\{1 + e^{-j\omega}\} \\ &= \arg\{(e^{-0.5j\omega})(e^{0.5j\omega} + e^{-0.5j\omega})\} \\ &= \arg\{e^{-0.5j\omega}\} + \arg\{(e^{0.5j\omega} + e^{-0.5j\omega})\} \\ &= \arg\{e^{-0.5j\omega}\} + 0 = -0.5\omega \end{aligned}$$

tai vastaava vaihtoehtoisesti

$$\begin{aligned} \arg\{H(e^{j\omega})\} &= \arg\{1 + e^{-j\omega}\} = \arg\{(1 + \cos(\omega)) + j(-\sin(\omega))\} \\ &= \arctan\left(\frac{-\sin(\frac{\omega}{2})}{1 + \cos(\frac{\omega}{2})}\right) = \arctan\left(\frac{-2 \sin(\frac{\omega}{2}) \cos(\frac{\omega}{2})}{1 + 2 \cos^2(\frac{\omega}{2}) - 1}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{-\sin(\frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{\omega}{2})}\right) = -0.5\omega \end{aligned}$$

Matlabilla vaihevasteen arvot ja piirto:



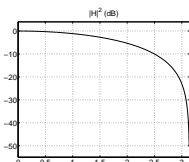
Kuva 45: Vaihevaste  $\arg\{H(e^{j\omega})\}$

```
[w' angle(transpose(H))] % pelkkä hipsu hermitoi
plot(w, angle(H));
```

- f) Desibeliasteikko, vertaa kuvia 44 ja 45, joista jälkimmäisessä  $20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$ . Huomaa, että  $20 \log_{10} 1 = 0$  dB. Siten esimerkiksi tehon tuplaus  $10 \log_{10} 2 = 3.01$  dB vastaa kolmen desibelin muutosta.

Matlabilla amplitudivasteen piirto:

```
plot(w, 20*log10(abs(H)));
```



Kuva 46: Tehollinen desibelikuvaaja  $20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$

- g) Ryhmäviive  $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\}$ .

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} (-0.5\omega) = 0.5$$

- h) 9. asteen suodin (10 kerrointa) on jyrkempi ja hitaampi.

- \*i) Matlabissa siirtofunktio esitetään sen kertoimien avulla:

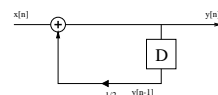
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-2j\omega}}{1 + 0.3e^{-j\omega} - 0.2e^{-2j\omega}}$$

```
num = [1 0 2];
den = [1 0.3 -0.2];
freqz(num, den);
```

46. Kausaalinen ja stabiili LTI-systeemi on määrätty seuraavan differenssiyhtälön avulla, joka havaitaan IIR-tyyppiseksi (takaisinkytkentä):

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

- a) Lohkokaavio, josta käy ilmi takaisinkytkentä eli rekursiivinen laskenta!

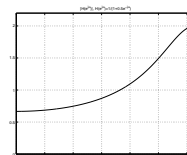


- b) Käytetään hyväksi muunnosominaisuuksia  $x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ :

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega})(1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \\ H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

- c) Hahmottele kuten ykköstehtävässä; saadaan ylipäästösuodin.

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \sqrt{H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + 0.5e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 + 0.5e^{j\omega}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + 0.5e^{j\omega} + 0.5e^{-j\omega} + 0.25}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1.25 + \cos(\omega)}} \end{aligned}$$



Kuva 47:  $|H(e^{j\omega})|$

- d) Esim. taulukosta 5.2.:  $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$ ,  $|a| < 1$ ,

$$\Rightarrow h[n] = (-0.5)^n u[n]$$

47. Tehtäväpaperissa piirretyn suotimen rajataajuus on  $0.5\pi$ .

- a) Katso vasemmanpuoleisinta kuvaa.
- b) Lineaarivaiheiselle suotimelle kertoimet ovat *symmetrisiä* siten, että "keskimmäinen" viive voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi ja rakentaa jäljelle jääneistä kosini- ja sini-komponentteja.

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} + \dots + a_1 e^{-j8\omega} + a_0 e^{-j9\omega} \\
 &= e^{-j9\omega/2} (a_0 e^{+j9\omega/2} + a_1 e^{+j7\omega/2} + a_2 e^{+j5\omega/2} + \dots + a_1 e^{-j7\omega/2} + a_0 e^{-j9\omega/2}) \\
 &= \underbrace{e^{-j9\omega/2}}_{c, |c|=1} \cdot \underbrace{(2a_0 \cos(9/2\omega) + 2a_1 \cos(7/2\omega) + \dots)}_R
 \end{aligned}$$

- c) Kuten tehtävässä 45b ja 45h. Jyrkempi suodin tarkoittaa hitaampaa suodinta ja päinvastoin.
- \*d) Suorakaidepulssin käänteismuunnos on sinc-funktio ja päinvastoin. Mitä monimutkaisempi/jyrkempi suodin toteutetaan (realisoidaan), sitä enemmän siinä tarvitaan laskentaa ja suodin hidastaa enemmän. Suotimen suunnitteluun (FIR ja IIR) tutustutaan T-61.246-kurssilla.

48. Moduli  $|H(j\omega)|$  on kompleksiluvun "pituus" eli  $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg H(j\omega)}$ . Kirjoitetaan siirtofunktio polaarimuodossa  $r e^{j\alpha}$ .

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} \\
 &= \frac{\sqrt{1 + \omega^2} e^{-j\alpha}}{\sqrt{1 + \omega^2} e^{j\alpha}} \\
 &= \frac{e^{-j\alpha}}{e^{j\alpha}} \\
 &= e^{-j2\alpha}
 \end{aligned}$$

missä  $\alpha = \arctan(\omega)$ .

Koska eksponenttifunktion moduli on aina yksi,  $|H(j\omega)| = 1 = A$ , niin kyseessä on ns. all-pass-suodin, jonka vahvistus kaikille taajuuksille on vakio.

Ryhmäviive  $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}(-2 \arctan(\omega)) = \frac{d}{d\omega}(2 \arctan(\omega)) = \frac{2}{1+\omega^2}$ . Erityisesti ryhmäviive on aina positiivinen. Mitä on tämän yhteys järjestelmän kausaalisuuteen?

49. \*Tutkitaan mekaanista systeemiä, jonka liikeyhtälö on muotoa

$$Bv(t) + K \int v(t) dt = f(t).$$

Vastaavantuypisistä tilanteesta kerrotaan kirjan sivuilla 473-475, sovelluskohteena auton jousitus tiellä.

- a) Josta kokoon puristava voima  $f_s(t) = K \int v(t) dt$ . Nopeus  $v(t)$  voidaan nyt kirjoittaa  $f_s$ :n funktiona

$$v(t) = \frac{1}{K} \frac{d}{dt} f_s(t).$$

Differentiaaliyhtälö saa tämän avulla muodon

$$\frac{B}{K} \frac{d}{dt} f_s(t) + f_s(t) = f(t).$$

Systeemi antaa syönteelle, joka on muotoa  $f(t) = e^{j\omega t}$  vasteen  $f_s(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ , eli siis

$$\frac{B}{K} H(j\omega) j\omega e^{j\omega t} + H(j\omega) e^{j\omega t} = e^{j\omega t}.$$

Ratkaistaan ylläoleva taajuusvasteen  $H(j\omega)$  suhteen

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{B}{K} j\omega} = \frac{1 - \frac{B}{K} j\omega}{1 + \frac{B^2}{K^2} \omega^2}.$$

Tutkitaan seuraavaksi taajuusvasteen magnitudia

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1 + \frac{B^2}{K^2} \omega^2} \sqrt{1 + \frac{B^2 \omega^2}{K^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{B^2}{K^2} \omega^2}}.$$

Funktio on selvästikin muotoa  $H(j\omega) \approx \frac{1}{1 + \omega^2}$ , eli siis selvästikin alipäästösuodin (kokeile taajuuksia  $\omega = \{0, 10, 100\}$ ).

- b) Vaimenninta kokoon puristava voima  $f_d(t) = Bv(t)$ . Nopeus saadaan tämän avulla muotoon

$$v(t) = \frac{1}{B} f_d(t)$$

ja differentiaaliyhtälö

$$f_d(t) + \frac{K}{B} \int f_d(t) dt = f(t).$$

Ratkaistaan yhtälö a-kohdan tapaan sijoittamalla  $f_d(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$  yhtälöön, jolloin saadaan

$$H(j\omega)e^{j\omega t} + \frac{K}{B} \frac{1}{j\omega} H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}.$$

Näin saadaankin taajuusvaste

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{K}{B} \frac{j}{\omega}} = \frac{1 + \frac{K}{B} \frac{j}{\omega}}{1 + \frac{K^2}{B^2 \omega^2}}.$$

Tutkimalla jälleen taajuusvasteen magnitudia

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1 + \frac{K^2}{B^2 \omega^2}} \sqrt{1 + \frac{K^2}{B^2 \omega^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{K^2}{B^2 \omega^2}}}$$

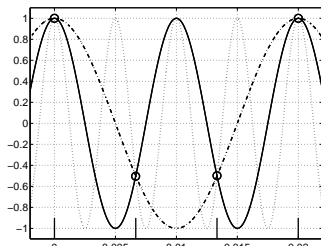
havaitaan, että funktio on muotoa  $H(j\omega) \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega^2}}$ , jonka kuvaaja on ylipäästötyyppiä.

50. Alkuperäisen signaalin korkein taajuus (ainoa) on 100 Hertziä. Siten matalin näytteenottotaajuus saa olla 200 Hertziä eli näytteenottovälinä 0.005 sekuntia tai vähemmän, jotta laskostumista ei tapahdu.

Viimeisessä kohdassa tapahtuu siis laskostumista. Kun  $T_s = 2/300 \approx 0.00666$ ,  $f_s = 150$  Hz, eli kun näytteenottotaajuus on pienempi kuin kaksi kertaa korkein (ainoa) taajuus, niin

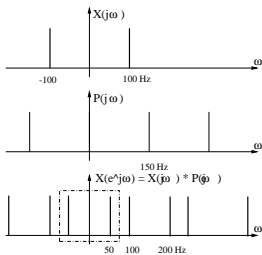
$$\begin{aligned}
 x[n] = x(n/f_s) = x(nT_s) &= \cos(2\pi 100 n (2/300)) \\
 &= \cos(2\pi (200/300) n - 2\pi n) \\
 &= \cos(2\pi (-100/300) n) \\
 &= \cos(2\pi 50 n (2/300))
 \end{aligned}$$

Nähdään siis, että samat diskreetit näytenpisteet toteutuvat myös 50 Hertzin jatkuvalla kosinikomponentilla. Signaaliin on siis tullut taajuus, jota siinä alunperin ei ole ollut.



Kuva 48: Uusi 50 Hz:n taajuus, kun  $T_s = 0.00666$  s. Myös esimerkiksi 200 Hz:n komponentti toteuttaa diskreetit pisteet.

Sama vielä taajuustasossa: Alunperin jatkuva 100 Hz:n kosinikomponentti, jota näytteis-tetään liian pienellä näytteenottotaajuudella 150 Hz. Näytteet sopivat kaikkiin jatkuva-aikaisiin kosinikomponentteihin 50 + 150k Hz ja -50 + 150k Hz. Diskreettiä signaalia palautettaessa nähdään vain taajuudet nolasta puoleen näytteenottotaajuuteen.



51. Impulssijuna

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

Koska  $p(t)$  on jaksollinen funktio ajan  $t$  suhteen jaksolla  $T_s$ , se voidaan esittää Fourier-sarjana.  $T_s$  esittää tässä näytteenottoväliä ( $s = \text{sampling}$ ).

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi kt/T_s)}$$

jossa

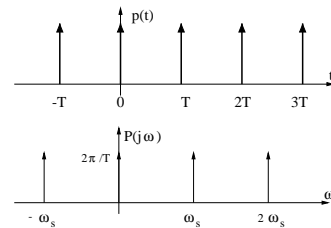
$$a_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-j(2\pi kt/T_s)} dt = \frac{1}{T_s} e^{-j(2\pi kt/T_s)} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_s}$$

kaikille  $k$ :n arvoille tulee  $\delta(t)$ :n integroimisen määritelmästä. (Taulukkokirjasta:  $\int \delta(t) dt = 1$ ,  $\int \delta(t)x(t) dt = x(t)|_{t=t_0}$ .)

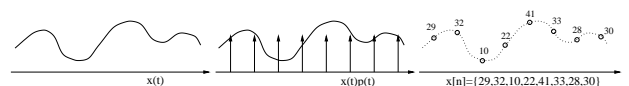
Täten  $a_k = \frac{1}{T_s}$  eli

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi kt/T_s)} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s kt}$$

kun  $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$



Esimerkki näytteenotosta aikatasossa (kuvattuna kyseisellä mallilla):



52. Kaavan (4.22) mukaan jaksollisen signaalin Fourier-sarjaesityksen

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

jossa  $a_k$  ovat Fourier-kertoimet ja  $\omega_0$  peruskulmataajuus, Fourier-muunnos voidaan esittää muodossa

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Näin ollen edellisen tehtävän impulssijuna, jossa kaikki kertoimet  $a_k = 1/T_s$  ja peruskulmataajuutena  $\omega_s$ , voidaan esittää

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$



Näytteistys aika- ja taajuustasossa voidaan siis johtaa

$$x[n] = x(t) \cdot p(t) \iff \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} [P(j\omega) * X(j\omega)] = X(e^{j\omega})$$

Varsinainen lasku, muistetaan  $\int \delta(t)x(t)dt = x(t)|_{t=0}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} [P(j\omega) * X(j\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(j\theta)X(j(\omega - \theta))d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k\omega_s)X(j(\omega - \theta))d\theta \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k\omega_s)X(j(\omega - \theta))d\theta \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

Eli diskreetin signaalin spektri on analogisen signaalin spektri kopioituna näytteenotto-taajuuden välein ja summattuna yhteen.

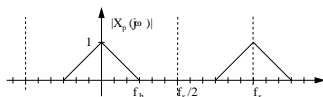
53. Huomaa ensin, että jatkuvan ajan  $X(j\omega)$ :n spektri on symmetrinen y-akselin suhteen. Kun signaalia näytteistetään, sen diskreetin ajan signaalin spektri muuttuu  $2\pi$ -jaksolliseksi, toisin sanoen, spektrit kopioituvat näytteenottotaajuuden välein. Korkeimmaksi havaittavaksi taajuudeksi jää puolet näytteenottotaajuudesta.

Edellisten tehtävien mukaisesti:

$$x[n] = x_p(nT_s) = x(t)p(t) \iff X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

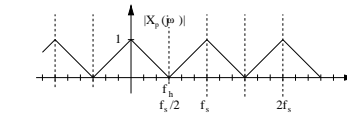
Aikatazon kertolasku vastaa taajuustason konvoluutiota. Konvoluutio merkitsee käytännössä  $X(j\omega)$ :n kopioimista ( $P$ :n)  $f_s$ :n välein, mistä johtuu diskreetin signaalin spektrin jaksollisuus  $f_s$ :n eli toisaalta  $2\pi$ :n välein.

a) Kuva 49. Korkein taajuus vain neljäsosa näytteenottotaajuudesta. Ei tapahdu laskostumista.



Kuva 49:  $f_h = 0.25 f_s$

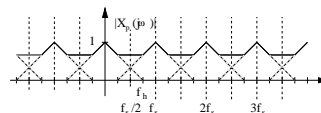
b) Kuva 50. Rajatapaus Nyquistin taajuudella (puoli näytteenottotaajuutta).



Kuva 50:  $f_h = 0.5 f_s$

c) Kuva 51. Selvää laskostumista. Konvoluutiolaskusta nähdään, että  $X_p(j\omega) = X(e^{j\omega})$  on summa **kaikista** laskostuneista taajuuksista. Spektriä kuvaa siis alla olevassa kuvassa paksu yhteinen viiva.

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \\ &= \frac{1}{T_s} (\dots + X(j(\omega - \omega_s)) + X(j\omega) + X(j(\omega + \omega_s)) + X(j(\omega + 2\omega_s)) + \dots) \end{aligned}$$



Kuva 51:  $f_h = 0.75 f_s$

54. Tutkitaan siis jatkuva-aikaista signaalia

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)$$

taajuuksilla  $f_1 = 100$  Hz,  $f_2 = 300$  Hz ja  $f_3 = 750$  Hz. Muista myös  $\omega = 2\pi f$ , jos tarvitaan kulmataajuutta.

Koska kosinifunktio on jaksollinen, tiedetään, että  $x(t)$  on jaksollinen ja sille voidaan etsiä Fourier-sarjaesitys. Lasketaan tai havaitaan suoraan, että  $x(t)$ :n perustaajuus  $f_0 = 50$  Hz. Näin saadaan esitettyä  $f_1 = 2f_0$ ,  $f_2 = 6f_0$  ja  $f_3 = 15f_0$ , ja edelleen käyttämällä Fourier-sarjan määritelmää

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi f_0 t)}$$

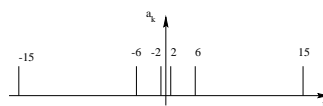
ja eksponenttifunktiota

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2\pi 2f_0 t) + \cos(2\pi 6f_0 t) + \cos(2\pi 15f_0 t) \\ &= \frac{1}{2} ((e^{j2\pi 2f_0 t} + e^{-j2\pi 2f_0 t}) + (e^{j2\pi 6f_0 t} + e^{-j2\pi 6f_0 t}) + (e^{j2\pi 15f_0 t} + e^{-j2\pi 15f_0 t})) \end{aligned}$$

saadaan Fourier-sarjan kertoimet

$$a_{-15} = a_{-6} = a_{-2} = a_2 = a_6 = a_{15} = \frac{1}{2}$$

Jokainen  $x(t)$ :n sinusoidi tuottaa piikin Fourier-spektriin. **HUOM!** Tässä tehtävässä käsitellään yksinkertaistaen vain "puhtaita" kosineja, joiden kulma on nolla, ts. Fourier-kerroin on reaalinen. Fourier-kertoimet (muunnos) ovat yleensä kompleksisia eli signaalikomponentit ovat eri vaiheissa toistensa suhteen. Eri vaiheet komponentit, vaikkapa  $\cos(2\pi ft)$  ja  $\cos(2\pi ft - \pi)$ , voivat kumota toisensa. Kuvassa 52 Fourier-kertoimien amplitudin suuruus (vaihe siis tässä tehtävässä nolla).



Kuva 52: Fourier-sarjan esitys signaalille  $x(t)$ . Fourier-kertoimen indeksi kertoo perustaajuuden monikerran.

Fourier-sarjan esitys vastaa  $X(j\omega)$ :n spektriä, kun x-akselille asetetaan taajuudet  $f_1 = 100$  Hz,  $f_2 = 300$  Hz ja  $f_3 = 750$  Hz.

Signaali näytteistetään taajuudella  $f_s = 1/T_s$  eli alkuperäisestä signaalista otetaan  $f_s$  kappaletta näytteitä joka sekunti.

$$x[n] = x(nT) = x\left(\frac{n}{f_s}\right) = \left( \cos(2\pi \frac{f_1}{f_s} n) + \cos(2\pi \frac{f_2}{f_s} n) + \cos(2\pi \frac{f_3}{f_s} n) \right)$$

Näytteenotto prosessi voidaan siis tulkita jatkuva-aikaisen signaalin  $x(t)$  kertomisenä impulssijunan  $p(t)$  kanssa. Taajuustason esitys on muunnosten konvoluutio, jolloin

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

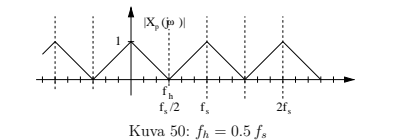
Näytteistys voidaan nähdä siis jatkuva-aikaispektrin  $X$ :n kopiointina näytteenottotaajuuden välein. Koska  $X$  on symmetrinen, se voidaan nähdä myös taajuuksien kääntämisellä (**jokaisen**) Nyquist-taajuuden (näytteenottotaajuuden puolikas) yli.

Kun signaaleja rekonstruoidaan, toisin sanoen diskreetistä lukujonosta kehitetään jatkuva-aikainen signaali, voidaan huomata vain taajuuksia, jotka ovat alle Nyquistin taajuuden. Ylimenevät taajuudet aiheuttavat laskostumista pienemmille taajuuksille.

**Tehtävän esimerkit.**

Tehtävässä  $X(j\omega)$  on näytteistetty kolmella eri taajuudella  $f_s$ : 1600 Hz, 800 Hz ja 400 Hz, Nyquist-taajuus on puolet näytteenottotaajuudesta  $f_s/2$  eli vastaavasti 800 Hz, 400 Hz ja 200 Hz. Olkoon  $f_h$  korkein taajuus syötesignaaleissa.

i)  $f_s = 1600$  Hz,  $f_s/2 = 800$  Hz  $>$   $f_h$ . Ei laskostumista. Kaikki kolme taajuutta voidaan palauttaa. Kuva 53.



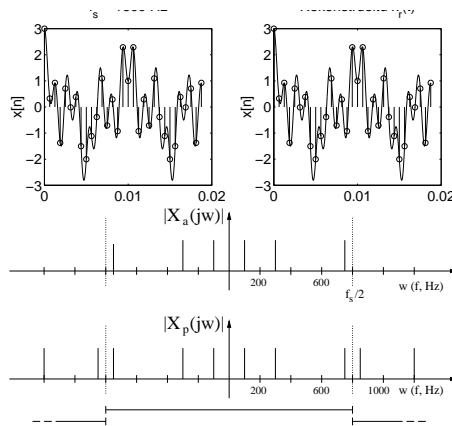
ii)  $f_s = 800$  Hz,  $f_s/2 = 400$  Hz  $<$   $f_h$ . Havaitaan enää taajuuksia 400 Hertziin asti eli alkuperäinen taajuus 750 Hz on kadonnut. Se on laskostunut taajuudelle 50 Hz. Katso kuvaa 54.

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{750}{800} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{-50}{800} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{50}{800} n) \end{aligned}$$

iii)  $f_s = 400$  Hz,  $f_s/2 = 200$  Hz  $<$   $f_h$ . Taajuudella 100 Hz vierastumista. Taajuudet 300 ja 750 Hz eivät ole enää havaittavissa. Katso kuvaa 55.

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{300}{400} n) + \cos(2\pi \frac{750}{400} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{-100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{-50}{400} n) \\ &= 2 \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{50}{400} n) \end{aligned}$$

Näytteenottooreaman mukaan signaali voidaan palauttaa alkuperäisenä vain jos sen korkein taajuus on enintään puolet näytteenottotaajuudesta.



Kuva 53:  $f_s = 1600$  Hz. Yläkuvassa summakosini näytteistettynä ja palautettuna: ei laskostumista. Alakuvassa taajuuskaistalle  $-800..800$  Hz ei ole laskostunut taajuuksia.

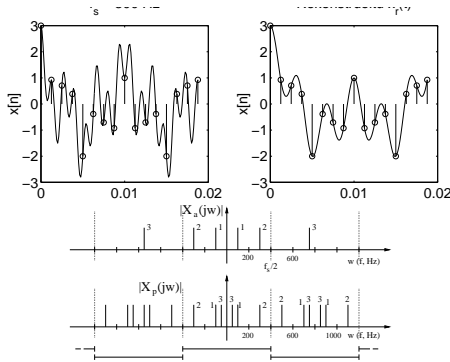
ii)  $f_s = 800$  Hz,  $f_s/2 = 400$  Hz  $<$   $f_h$ . Havaitaan enää taajuuksia 400 Hertziin asti eli alkuperäinen taajuus 750 Hz on kadonnut. Se on laskostunut taajuudelle 50 Hz. Katso kuvaa 54.

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{750}{800} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{-50}{800} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{50}{800} n) \end{aligned}$$

iii)  $f_s = 400$  Hz,  $f_s/2 = 200$  Hz  $<$   $f_h$ . Taajuudella 100 Hz vierastumista. Taajuudet 300 ja 750 Hz eivät ole enää havaittavissa. Katso kuvaa 55.

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{300}{400} n) + \cos(2\pi \frac{750}{400} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{-100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{-50}{400} n) \\ &= 2 \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{50}{400} n) \end{aligned}$$

Näytteenottooreaman mukaan signaali voidaan palauttaa alkuperäisenä vain jos sen korkein taajuus on enintään puolet näytteenottotaajuudesta.



Kuva 54:  $f_s = 800$  Hz. Yläkuvassa summakosini näytteistettynä ja palautettuna; näytteenottoaajuus ei ole riittänyt informaation säilyttämiseen sellaisenaan. Alakuvassa 750 Hz:n komponentti on laskostunut 50 Hz:ksi mielenkiintoisella kaistalla  $-400..400$  Hz.

Signaalin laskostumista tietyille taajuuksille voidaan käyttää hyväksi. Monen näytteenottoaajuuden järjestelmissä (multirate systems) muun muassa kapeakaistaisten suotimien laskennan kompleksisuutta voidaan vähentää huomattavasti.

55. Signaalin rekonstruointi näytteistä.

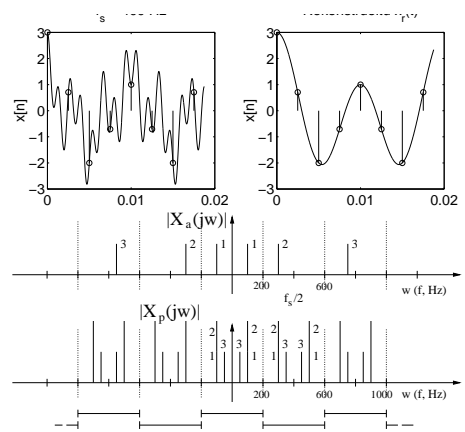
- a) Reaalille signaalille  $X(j\omega)$  on symmetrinen. Esimerkiksi ylin kuva 56.
- b) Diskreetti Fourier-muunnos on  $2\pi$ -jaksollinen. Esimerkiksi keskimäinen kuva 56.
- c) Alipäästöuodatuksella voidaan palauttaa alkuperäinen signaali. Esimerkiksi alin kuva 56.
- d) Kum

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

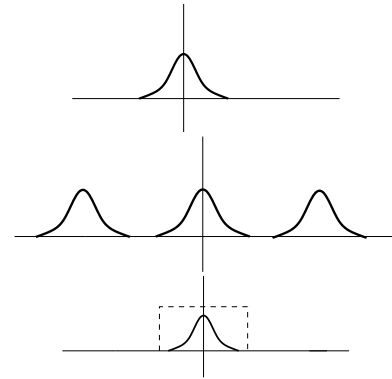
niin laskemalla tai taulukosta saadaan

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t / \pi)$$

Tällöin kukunkin diskreettiin mittauspisteeseen voidaan ajatella sinc-käyrä ja näiden summasta tulee rekonstruoitu signaali. Katso kuva 7.10(c) kirjasta.



Kuva 55:  $f_s = 400$  Hz. Yläkuvassa summakosini näytteistettynä ja palautettuna; signaali on muuttunut entistä enemmän näytteenotossa.



Kuva 56: Tehtävä 55. Ylhäällä mielivaltainen analogisen signaalin spektri  $X(j\omega)$ . Keskellä siitä näytteistetty, jaksollinen  $X_p(j\omega)2\pi$  välein. Alhaalla alipäästöuodatuksella analogiseksi palautettu  $X_r(j\omega)$ .

**Kaavakokoelma**

Merkintä  $x(t)$  viittaa jatkuva-aikaiseen signaaliin ja  $x[n]$  diskreetti-aikaiseen sekvenssiin. Yleisesti signaaleille ja järjestelmille  $y$  on vaste (output),  $h$  on järjestelmän impulssivaste ja  $x$  syöte (input).  $\delta(t)$  ja  $\delta[n]$  ovat yksikköimpulssifunktioita.  $u(t)$  ja  $u[n]$  ovat yksikköaskelfunktioita.  $s(t)$  ja  $s[n]$  ovat askelvastefunktioita. Nousuaika määritellään ajaksi, joka kuluu askelvästeeen nousuun 10%:sta 90%:iin maksimiarvostaan.

Merkinnöissä on pientä vaihtelua. Fourier-sarjoissa  $\omega_0$  (rad),  $\Omega_0$  (rad/s) on peruskulmataajuus,  $f_0$  (Hz) perustaaajuus,  $T$  (s) ja  $N$  (1) jatkopituuksia. Diskreetillä signaalilla on näytteenottoaajuus  $f_s$  tai  $f_T$  (Hz). Jatkuvalle  $\Omega = 2\pi f$ ,  $f = 1/T$ , tai kirjoitetaan myös  $\omega$ , yksikkönä joka tapauksessa rad/s. Diskreetille ( $N, n, k \in \mathbb{Z}$ )  $\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s$ .

**Kompleksiluvut, Euler, geometrinen sarja, sinc, perusfunktiot:**

$$z = x + jy = r e^{j\theta}$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}, |a| < 1$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Even}\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\text{Odd}\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$$

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$\text{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$$

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

**Likiarvoja ja laskusääntö Dirac-deltafunktiolle:**

$\theta$	0	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$
$\sin(\theta)$	0.000	0.3827	0.5000	0.7071	0.8660	1.0000	0.7071	0.0000
$\cos(\theta)$	1	0.9239	0.8660	0.7071	0.5000	0	-0.7071	-1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0)$$

**Konvoluutio:**

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] x[n - k]$$

**FOURIER-SARJA**

**Jatkuva-aikaisen jaksollisen signaalin Fourier-sarja:**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \quad \text{jossa } a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

**Jatkuva-aikaisen Fourier-sarjan ominaisuuksia:**

Tässä  $x(t)$  ja  $y(t)$  ovat jaksollisia jaksolla  $T$ , sekä  $a_k$  ja  $b_k$  vastaavat Fourier-sarjan kertoimet.

- lineaarisuus  $Ax(t) + By(t) \leftrightarrow Aa_k + Bb_k$
- aikasiirto  $x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\Omega_0 t_0}$
- taajuussiirto  $e^{jM\Omega_0} x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$
- reaalin signaali  $x(t) \leftrightarrow \begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
- reaalin ja parillinen  $x(t) \leftrightarrow a_k$  reaalin ja parillinen; reaalin ja pariton  $x(t) \leftrightarrow a_k$  puhtaasti imaginaarinen ja pariton
- reaalin  $\text{Even}\{x(t)\} \leftrightarrow \text{Real}\{a_k\}$  ja reaalin  $\text{Odd}\{x(t)\} \leftrightarrow j \text{Imag}\{a_k\}$
- Parsevalin relaatio jaksolliselle signaalille  $(1/T) \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

**Diskreetti-aikaisen jaksollisen sekvenssin Fourier-sarja:**

$$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \text{jossa } a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

**Diskreetti-aikaisen Fourier-sarjan ominaisuuksia:**

Tässä  $x[n]$  ja  $y[n]$  ovat jaksollisia jaksolla  $N$ , sekä  $a_k$  ja  $b_k$  vastaavat Fourier-sarjan kertoimet jaksollisia jaksolla  $N$ .

- lineaarisuus  $Ax[n] + By[n] \leftrightarrow Aa_k + Bb_k$
- aikasiirto  $x[n - n_0] \leftrightarrow a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
- taajuussiirto  $e^{jM(2\pi/N)n} x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$
- reaalin sekvenssi  $x[n] \leftrightarrow \begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
- reaalin ja parillinen  $x[n] \leftrightarrow a_k$  reaalin ja parillinen; reaalin ja pariton  $x[n] \leftrightarrow a_k$  puhtaasti imaginaarinen ja pariton
- reaalin  $\text{Even}\{x[n]\} \leftrightarrow \text{Real}\{a_k\}$  ja reaalin  $\text{Odd}\{x[n]\} \leftrightarrow j \text{Imag}\{a_k\}$
- Parsevalin relaatio jaksolliselle sekvenssille  $(1/N) \sum_{n=(N)} |x[n]|^2 = \sum_{k=(N)} |a_k|^2$

## JATK.AIK. FOURIER-MUUNNOS (CTFT)

Jatkuva-aikaisen ei-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Jatkuva-aikaisen Fourier-muunnoksen ominaisuuksia:

Tässä  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$  ja  $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$ .

- lineaarisuus  $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$
- aikasiirto  $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
- taajuussiirto  $e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0))$
- konvoluutio  $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$
- kertolasku  $x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) Y(j(\omega - \theta)) d\theta$
- derivointi ajassa  $(d/dt)x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$
- reaalin signaali  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
- Parsevalin relaatio jaksottomalle signaalille  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

Jatkuva-aikaisen Fourier-muunnoksen muunnospareja:

Tässä signaali  $\leftrightarrow$  F-muunnos.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi/j [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow 1/(a + j\omega)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow 2 \sin(\omega T_1)/\omega$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}(Wt/\pi) \leftrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

## DISKR.AIK. FOURIER-MUUNNOS (DTFT)

Diskreettiaikaisen ei-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos

$$F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen ominaisuuksia:

Tässä  $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$  ja  $y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$ , ja  $X(e^{j\omega})$  ja  $Y(e^{j\omega})$  ovat  $2\pi$ -jaksollisia.

- lineaarisuus  $ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
- aikasiirto  $x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- taajuussiirto  $e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
- konvoluutio  $x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
- kertolasku  $x[n] \cdot y[n] \leftrightarrow (1/(2\pi)) \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
- differenssi ajassa  $x[n] - x[n - 1] \leftrightarrow (1 - e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$
- reaalin sekvenssi  $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- Parsevalin relaatio jaksottomalle sekvenssille  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = (1/(2\pi)) \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

Diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen muunnospareja:

Tässä signaali  $\leftrightarrow$  F-muunnos.

$$\sum_{k=(N)} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - (2\pi/N)k)$$

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l))$$

$$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow (\pi/j) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l))$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow 1/(1 - a e^{-j\omega})$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1 + 0.5))}{\sin(0.5\omega)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}(Wn/\pi) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| < W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$